Objectifs et savoir-faire

- *Langage mathématique*
  - Décrire un ensemble de nombres avec rigueur.
  - Maîtriser le vocabulaire «condition nécessaire», «condition suffisante», «il faut», «il suffit», etc.
  - Maîtriser la syntaxe d'utilisation des quantificateurs $\forall$ et $\exists$.
- *Raisonnement par récurrence*
  - Rédiger un raisonnement par récurrence.
  - Comprendre l'utilité des différentes versions.
- *Nombres réels*
  - Exploiter une représentation graphique des nombres réels (notamment avec des valeurs absolues) pour guider un raisonnement.
  - Calculer avec des nombres réels, manipuler des inégalités et des encadrements.
  - Connaître et maîtriser la notion de partie entière d'un réel.
  - Connaître cos, sin et tan et de quelques relations trigonométriques.
- *Sommes et produits*
  - Connaître et manipuler les symboles $\sum$ et $\prod$.
  - Connaître la notion de factorielle $n!$ d'un entier naturel n.
  - Calculer des sommes (simples, doubles).
  - Calculer avec des coefficients binomiaux, utiliser la formule du binôme de Newton.
- *Études de fonctions*
  - Maîtriser la notion de composition de fonctions.
  - Maîtriser le vocabulaire «global» lié au fonctions : (im)parité, périodicité, majoré, minoré, borné, monotonie, stricte monotonie.
  - Notions intuitives de limite et de continuité ; dérivabilité et dérivée, formulaire ;
  - Connaître les propriétés des fonctions de référence, notamment exp, ln, $x \longmapsto x^{\alpha}$, cos, sin et tan.
  - Étudier les variations de fonction et représenter graphiquement.

► Note aux colleurs :

- les raisonnements par récurrence devront *a priori* reposer sur une hypothèse simple (le cas d'une hypothèse double ou forte devra être guidé) ;
- les sommes à connaître sont $\sum_{k=0}^{n} x^k$ (pour $x \neq 1$), $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$ ainsi que la formule du binôme ;
- attention par rapport aux années précédentes : les nombres complexes **ne sont pas au programme**.

► Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :

1. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $2^n \geqslant n^3$.
2. Montrer que pour tout réel x, on a : $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor = \lfloor 3x \rfloor$.
3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour toute fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ bornée, on note :
$$\| f \| = \sup \left\{ \left| f(x) \right| \ ; \ x \in \mathrm{I} \right\},$$
Montrer que si f et g sont deux fonctions bornées sur I alors $f + g$ est bornée sur I et l'on a :
$$\| f + g \| \leqslant \| f \| + \| g \|.$$
4. Soit n un entier avec $n \geqslant 1$, calculer $\mathrm{S} = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \min(i, j)$.
5. Soit n un entier avec $n \geqslant 2$, calculer $\mathrm{P} = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a. Justifier le fait que : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
   b. Simplifier l'expression $k\binom{n}{k}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.
   c. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.