Objectifs et savoir-faire

- *Suites réelles :*
  - Exprimer en fonction de n une suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique ou donnée par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
  - Étudier la monotonie d'une suite.
  - Justifier la convergence ou la divergence d'une suite.
  - Calculer des limites (par opérations ou par théorème d'encadrement).
  - Maîtriser la notion de suites adjacentes, faire le lien avec la convergence.

► Note aux colleurs :

- attention par rapport aux années précédentes : les nombres complexes **ne sont pas au programme**.

► Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :

1. Étudier la monotonie des suites u et v données par :

$$u_n = 1+\frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{n^n}{n!}.$$

2. Étudier la convergence des suites données par :

$$u_n = \frac{\sin(n^2)}{n}\ ,\ v_n = \frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}} \text{ et } w_n = \sqrt{n+\cos(n)}-\sqrt{n}.$$

3. Déterminer les limites des suites u et v données par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \text{ et } v_n = \prod_{k=1}^{2n-1}\left(2-\frac{k}{2n}\right).$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Déterminer la limite de la suite u donnée par :

$$u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor .$$

5. Justifier de deux façons (étude de fonction et argument de nature géométrique) que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1)-\ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Pour la méthode avec étude de fonction, on pourra ne détailler que l'une des deux inégalités.

6. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)$ et $w_n = v_n - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

a. Montrer que les deux suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

b. Montrer que la limite commune de (v_n) et (w_n) appartient à $]0,1[$.

*On utilisera le résultat de la question de cours **5**.*

7. Montrer de deux façons (en utilisant le résultat de la question de cours **6** et, par sommation, à partir des inégalités de la question de cours **5**) que :

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$