Objectifs et savoir-faire

- *Polynômes*
  - Maîtriser le vocabulaire lié aux polynômes (degré, racines, ordre de multiplicité d'une racine,...).
  - Calculer avec des polynômes, notamment effectuer une division euclidienne.
  - Maîtriser la notion de racine d'un polynôme et son lien avec la notion de factorisation.
- *Matrices*
  - Maîtriser les opérations algébriques sur les matrices.
  - Comprendre la notion d'inversibilité d'une matrice et le lien avec les systèmes linéaires.
  - Calculer l'inverse d'une matrice.
- *Systèmes linéaires*
  - Résoudre un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.
  - Résoudre un système en discutant selon les valeurs d'un paramètre.

► **Note aux colleurs :**

- attention par rapport aux années précédentes : les nombres complexes **ne sont pas au programme**.
- le nouveau programme concernant les polynômes est très léger ; l'ensemble des (fonctions) polynômes se note $\mathbb{R}[x]$.

► **Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :**

1. *Inégalité de Cauchy-Schwarz*
Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tous réels $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, on a :
$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right),$$

2. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$. Calculer le degré et le coefficient dominant de $\Delta(x) = \mathrm{P}(x+1) - \mathrm{P}(x)$.

3. Soit $n \geqslant 1$, montrer que le polynôme $\mathrm{P}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$ n'a que des racines simples.

4. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Exprimer A^2 en fonction de A et I_3 puis en déduire A^{-1}.

5. Trouver l'inverse éventuel des matrices suivantes :
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $\mathrm{E}_{i,j}$ la matrice dont le seul coefficient non nul est celui à la place (i,j) qui vaut 1. Soit $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$, calculer $\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell}$.

7. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures A et B est une matrice triangulaire supérieure et que les coefficients diagonaux de AB sont les produits de ceux de A et de B.

8. Résoudre, en fonction du réel a, le système suivant :
$$(\mathrm{S}_a) \left\{ \begin{aligned} 3x + 2y - z &= 3 \\ x + ay + az &= 0 \\ -x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned} \right. .$$