Objectifs et savoir-faire

- *Matrices*
  - Calculer des puissances de matrices (intuition et récurrence, binôme de Newton, utilisation d'un polynôme annulateur ou «diagonalisation guidée»).
  - Utiliser des puissances de matrices (notamment pour des systèmes de suites récurrentes).
- *Espace vectoriels*
  - Montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel par la propriété de stabilité par combinaison linéaire ou à l'aide de la notation Vect.
  - Montrer, à l'aide d'un contre-exemple explicite, qu'une partie d'un espace vectoriel n'est pas un sous-espace vectoriel.
  - Maîtriser la notion de combinaison linéaire et la notation Vect.
  - Constituer un « catalogue » d'espaces vectoriels de référence.
  - Montrer qu'une famille de vecteurs engendre un sous-espace vectoriel.

► Note aux colleurs :

- pas de famille libre, de bases, de dimension pour le moment.

► Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :

1. Calculer les puissances de la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

3. Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. À l'aide d'un polynôme annulateur, calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

5. Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}^3$, montrer que c'est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ par deux méthodes (stabilité par combinaison linéaire et notation Vect) ou montrer que ce n'est pas le cas (en explicitant un contre-exemple à la définition) :

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x + y + z = 0\right\} \text{ et } G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; xy = 0\right\}.$$

6. Pour chacune des parties suivantes de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, montrer que c'est un s.e.v. de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ou montrer que ce n'est pas le cas (en explicitant un contre-exemple à la définition) :

$$F = \left\{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \; ; \; f \text{ impaire}\right\} \text{ et } G = \left\{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \; ; \; f \text{ s'annule}\right\}.$$

7. Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}[x]$, montrer que c'est un s.e.v. de $\mathbb{R}[x]$ ou montrer que ce n'est pas le cas (en explicitant un contre-exemple à la définition) :

$$F = \left\{P \in \mathbb{R}[x] \; ; \; P(0) = 1\right\} \text{ et } G = \left\{P \in \mathbb{R}[x] \; ; \; x - 1 \text{ divise } P(x)\right\}.$$

8. Pour chacune des parties suivantes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que c'est un s.e.v. de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ou montrer que ce n'est pas le cas (en explicitant un contre-exemple à la définition) :

$$F = \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \; ; \; \text{A triangulaire supérieure}\right\}$$

$$\text{et } G = \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \; ; \; \text{les coefficients diagonaux de A sont tous nuls}\right\}.$$

9. On considère l'ensemble E des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ sont la somme des coefficients diagonaux est nulle. Montrer que c'est un s.e.v. de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ par deux méthodes (stabilité par combinaison linéaire et notation Vect).

10. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\mathbf{a} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 0)$ et $\mathbf{c} = (1, 1, 1)$.
Montrer que $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.