

Objectifs et savoir-faire► **Séries :**

- Connaître les séries de référence : séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$, séries géométriques $\sum x^n$ et les deux premières séries géométriques dérivées $\sum nx^{n-1}$ et $\sum n(n-1)x^{n-2}$.
- Connaître les propriétés des séries convergentes.
- Étudier la convergence d'une série (par le calcul des sommes partielles ou par utilisation d'une série de référence).
- Calculer la somme d'une série convergente (par le calcul des sommes partielles ou par utilisation d'une série de référence de somme connue).
- Utiliser, sur des exemples simples, la formule de Taylor avec reste intégral pour étudier la convergence d'une série et calculer sa somme.
- Maîtriser les critères de comparaison ($0 \leq u_n \leq v_n$) et d'équivalence ($u_n \sim v_n$) pour les séries à termes positifs (et rédiger correctement leur utilisation).
- Maîtriser le critère de négligeabilité ($u_n = o(v_n)$) pour une série à termes quelconques (et rédiger correctement son utilisation).
- Connaître la notion de convergence absolue et son lien avec la convergence.

► **Note aux colleurs :**

- La notion de série alternée n'est pas au programme mais le concept a été abordé sur des exemples et le critère de convergence a été démontré en exercice; il n'est néanmoins pas supposé connu.
- Le critère d'Alembert n'est pas au programme.

► **Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :**

1. *Lemme de Cesaro* – Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite ℓ alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

2. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).$$

3. Étudier la nature des séries de terme général :

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } v_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

4. Étudier la nature des séries de terme général :

$$u_n = \frac{(\ln(n))^2}{n^4} \text{ et } v_n = \frac{1}{n \times n^{\frac{1}{n}}}.$$

5. Étudier la nature des séries de terme général :

$$u_n = \frac{\cos(n) - \sin(n)}{n^2} \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2}.$$

6. Étudier la convergence et déterminer la somme des séries de terme général :

$$u_n = ne^{-n} \text{ et } v_n = \frac{2^n}{(n+2)!}.$$

7. Étudier la convergence et déterminer la somme de la série de terme général :

$$u_n = \frac{4^n}{(2n)!}.$$

8. *Critère des séries alternées* – Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante qui converge vers 0, on pose pour tout entier n : $u_n = (-1)^n a_n$ et $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

a. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

b. En déduire que la série de terme général u_n est convergente.