Objectifs et savoir-faire

► *Intégrales généralisées*

- Connaître les intégrales de référence : intégrales de Riemann $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}\mathrm{d}t$, intégrale d'une exponentielle $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t$.
- Connaître les propriétés des intégrales convergentes.
- Étudier la convergence d'une intégrale (par le calcul d'une intégrale sur un segment ou par utilisation d'une intégrale de référence).
- Calculer une intégrale convergente.
- Maîtriser les critères de comparaison ($0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ et $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$) pour les intégrales de fonctions positives et rédiger correctement leur utilisation.
- Maîtriser le critère de comparaison ($f(x) = o(g(x))$) pour une intégrale de fonction «quelconque».
- Connaître la notion de convergence absolue et son lien avec la convergence.
- Maîtriser le théorème de changement de variable sur un intervalle $]a,b[$.

► **Note aux colleurs :**

- Les comparaisons de fonctions (négligeabilité et équivalence) et les DL ont été vus.
- Les intégrations par parties ne doivent être réalisées que sur des segments sur lesquels les fonctions sont continues (avant de faire tendre une borne, ou les deux).

► **Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :**

1. Soit f et g deux fonctions continues sur $[0,+\infty[$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$, on pose pour tout $x \geqslant 0$:
$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{G}(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$$
i.e. F et G sont les primitives de f et g sur $[0,+\infty[$ qui s'annulent en 0.
On suppose que $f \underset{+\infty}{=} o(g)$ et $\mathrm{G}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
Montrer que $\mathrm{F} \underset{+\infty}{=} o(\mathrm{G})$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général :
$$u_n = (-1)^n n^a\left(\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$
On admettra que si (a_n) est une suite décroissante de réels de limite nulle alors la série $\sum(-1)^n a_n$ converge.

3. À l'aide d'une intégration parties, montrer la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

4. On pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

a. Justifier que le domaine de définition de la fonction Γ est $]0,+\infty[$.

b. Pour tout $x > 0$, déterminer une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$.

c. Déterminer une relation entre $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$.

5. Pour tout x et y réels strictement positifs, on pose :
$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t.$$

a. Prouver la convergence de l'intégrale définissant $\mathrm{B}(x,y)$.

b. Démontrer que, pour tous $x>0$ et $y>0$, on a : $\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x)$.

c. Démontrer que, pour tous $x>0$ et $y>0$, on a : $\mathrm{B}(x+1,y) = \frac{x}{y}\mathrm{B}(x,y+1)$.