Objectifs et savoir-faire

- Maîtriser le formalisme des espaces probabilisés.
- Utiliser les formules des probabilités totales et des probabilités composées.
- Utiliser l'indépendance d'événements.
- Appliquer le théorème de la limite monotone (*i.e.* le théorème de continuité croissante/décroissante).
- Manipuler des variables aléatoires réelles.
- Étudier une variable aléatoire réelle discrète.
- Connaître les lois discrètes usuelles (finies, géométrique et de Poisson).
- Maîtriser les notions liées aux couples de variables aléatoires discrètes (loi conjointe, lois marginales, loi conditionnelle, espérance par théorème de transfert ou d'un produit de v.a. indépendantes).
- Étudier une somme, un maximum ou un minimum de deux v.a. discrètes indépendantes.

► Note aux colleurs :

- Aucun exercice ne doit être posé sur la dénombrabilité ni sur les tribus.
- Pas encore d'inégalités de Markov et Tchebychev, ni de convergence (loi, probabilité).

► Note aux étudiants :

- La calculatrice peut être utile en colle, penser à la prendre !

► Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :

1. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, on note F_X sa fonction de répartition. Montrer que : $F_X(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ et $F_X(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

2. On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir *pile* est p et la probabilité d'obtenir *face* est $q = 1 - p$ (avec $0 < p < 1$ et $p \neq \frac{1}{2}$).
On notera en abrégé P et F pour *pile* et *face* respectivement.

a. Soit $n \geqslant 1$, quelle est la probabilité de l'événement A_n : « la séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers n et $n+1$ » ?

b. Quelle est la probabilité de l'événement A : « la séquence PF apparaît au moins une fois » ?

3. Soit X une variable aléatoire réelle discrète infinie avec $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X = k) + (n+1)\,\mathbb{P}(X > n)$.

b. En déduire que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X > n)$ converge et que, dans ce cas, on a : $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$.

4. Montrer que si X et Y sont indépendantes et suivent respectivement des lois $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{P}(\mu)$ alors $X+Y$ suit la loi $\mathscr{P}(\lambda+\mu)$.

5. Montrer que si X et Y sont indépendantes et suivent respectivement des lois $\mathscr{B}(n,p)$ et $\mathscr{B}(m,p)$ alors $X+Y$ suit la loi $\mathscr{B}(n+m,p)$ (on admettra en fin de calcul une relation sur les coefficients binomiaux mais on l'énoncera clairement).

6. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes et suivant respectivement des lois $\mathscr{G}(p)$ et $\mathscr{G}(p')$. Déterminer la loi de $\min(X,Y)$.

7. Au portillon d'une station de métro, il se peut qu'une personne tente de passer avec une trop grosse valise ou avec une grande poussette et qu'un agent soit contraint d'intervenir pour faciliter le passage.
On suppose que le nombre N de problèmes de ce type dans une journée suit une *loi de Poisson* de paramètre λ et que les deux types de situations se produisent *dans les mêmes proportions*.
Quelle est la loi de la variable aléatoire V comptant le nombre de « problèmes de valise » ?