

Objectifs et savoir-faire

► Langage mathématique

- Décrire un ensemble de nombres avec rigueur.
- Maîtriser le vocabulaire «condition nécessaire», «condition suffisante», «il faut», «il suffit», etc.
- Maîtriser la syntaxe d'utilisation des quantificateurs \forall et \exists .

► Raisonnement

- Rédiger un raisonnement par récurrence.
- Comprendre l'utilité des différentes versions du raisonnement par récurrence.
- Formaliser un raisonnement par l'absurde, par contraposition, par disjonction de cas.

► Nombres réels

- Exploiter une représentation graphique des nombres réels (notamment avec des valeurs absolues) pour guider un raisonnement.
- Calculer avec des nombres réels, manipuler des inégalités et des encadrements.
- Connaître et maîtriser la notion de partie entière d'un réel.
- Connaître cos, sin et tan et quelques relations trigonométriques.

► Sommes et produits

- Connaître et manipuler les symboles \sum et \prod .
- Connaître la notion de factorielle $n!$ d'un entier naturel n .
- Calculer des sommes (simples, doubles).
- Calculer avec des coefficients binomiaux, utiliser la formule du binôme de Newton.

► Note aux colleurs :

- les raisonnements par récurrence devront *a priori* reposer sur une hypothèse simple (le cas d'une hypothèse double ou forte devra être guidé);
- les sommes à connaître sont $\sum_{k=0}^n x^k$ (pour $x \neq 1$), $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=1}^n k^3$ ainsi que la formule du binôme;
- attention, les nombres complexes **ne sont plus au programme**.

► Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :

1. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $2^n \geq n^3$.
2. Résoudre l'équation d'inconnue réelle x suivante : $\lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x + 1 \rfloor$.
3. Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Pour toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bornée, on note :

$$\|f\| = \sup \{|f(x)| ; x \in I\},$$

Montrer que si f et g sont deux fonctions bornées sur I alors $f + g$ est bornée sur I et :

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

4. Soit n un entier avec $n \geq 1$, calculer $S = \sum_{(i,j) \in [1,n]^2} \min(i, j)$.

5. Soit n un entier avec $n \geq 2$, calculer $P = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right)$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Justifier le fait que : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

b. Simplifier l'expression $k \binom{n}{k}$ pour $k \in [0, n]$.

c. Calculer la somme $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

7. Soit A et B deux parties d'un ensemble non vide E .

a. Montrer que $A \subset B$ si et seulement si $\mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B$.

b. Montrer que : $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.