Objectifs et savoir-faire

- *Études de fonctions*
  - Représenter une fonction du type $x \mapsto f(kx)$, $x \mapsto f(x+k)$, etc. à partir d'une fonction connue.
  - Maîtriser la notion de composition de fonctions.
  - Maîtriser le vocabulaire «global» lié aux fonctions : (im)parité, périodicité, majoré, minoré, borné, monotonie, stricte monotonie.
  - Notion d'asymptote au graphe d'une fonction.
  - Notions intuitives de limite, continuité, dérivabilité, dérivée; formulaire de dérivées usuelles.
  - Connaître les propriétés des fonctions de référence, notamment exp, ln, $x \mapsto x^\alpha$, cos, sin et tan.
  - Connaître les limites par croissances comparées.
  - Étudier les variations d'une fonction et la représenter graphiquement.
  - Définir une fonction numérique simple en Python et la représenter graphiquement (avec `numpy` et `matplotlib.pyplot`).
- *Suites réelles*
  - Exprimer en fonction de n une suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique ou donnée par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
  - Étudier la monotonie d'une suite.

► Note aux colleurs :

- Le but essentiel est de faire travailler les étudiants sur des études de fonctions, éventuellement en dérivant plusieurs fois, et de faire le lien avec l'obtention d'inégalités.
- On peut dans un second temps faire également travailler sur les propriétés de exp et ln (par exemple avec des équations simples).
- La partie sur les suites ne porte que sur les définitions des propriétés globales (monotonie, bornée, etc.) et rien n'a été vu sur les limites hormis la définition (mais l'on peut faire intervenir une suite à l'issue d'une étude de fonction puis se fonder sur les techniques vues dans le secondaire).

► Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :

1. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2 et paire, donnée sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \sqrt{x}.$$

Représenter graphiquement (en expliquant) la fonction f sur l'intervalle $[-3,3]$ puis déterminer l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Prouver l'inégalité suivante :

$$\forall u \geqslant 0,\ \ln(1+u) \geqslant u - \frac{u^2}{2}.$$

3. Étudier puis représenter graphiquement les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right).$$

4. On pose pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_\lambda(x) = \lambda x^2 - \ln\big(f(x)\big)$$

où f est la fonction de la question de cours précédente.

a. Pourquoi la fonction φ_λ est-elle bien définie? Justifier sa dérivabilité et calculer sa dérivée.

b. On suppose dans cette question que $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$. Montrer que l'on a :

$$\forall x \geqslant 0, f(x) \leqslant e^{\lambda x^2}.$$

Indication : on commencera par prouver, à l'aide d'une étude de fonction, que $\varphi'_\lambda(x)$ est du signe de x.

5. Étudier la monotonie des suites u et v données par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{n^n}{n!}.$$

6. Énoncer et démontrer (à l'aide de manipulations du symbole $\sum$) la formule donnant la somme des termes d'une suite arithmétique.
Énoncer et démontrer la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique.