Objectifs et savoir-faire

- *Suites réelles*
  - Exprimer en fonction de n une suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique ou donnée par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
  - Étudier la monotonie d'une suite.
  - Justifier la convergence ou la divergence d'une suite.
  - Calculer des limites (par opérations ou par théorème d'encadrement).
  - Maîtriser la notion de suites adjacentes, faire le lien avec la convergence.
  - Comparer asymptotiquement des suites à l'aide des notions de négligeabilité et d'équivalence (et utiliser les notations associées).

▸ **Note aux colleurs :**

- le lemme de Cesaro n'est pas *stricto sensu* au programme mais il a été vu et utilisé en exercice (et il figure dans les exercices à savoir refaire) ;
- le fait qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes deux vers ℓ est au programme ; pour les autres sous-suites, on a vu en exercice que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.

▸ **Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :**

1. Étudier la convergence des suites données par :

$$u_n = \frac{\sin(n^2)}{n}\ ,\ v_n = \frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}} \text{ et } w_n = \sqrt{n+\cos(n)} - \sqrt{n}.$$

2. Déterminer les limites des suites u et v données par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \quad \text{et} \quad v_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \left(2 - \frac{k}{2n}\right).$$

3. Justifier de trois façons (étude de fonction, inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ et argument de nature géométrique) que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Pour la méthode avec étude de fonction, on pourra ne détailler que l'une des deux inégalités.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $w_n = v_n - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

a. Montrer que les deux suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

b. Montrer que la limite commune de (v_n) et (w_n) appartient à $]0,1[$.

*On utilisera le résultat de la question de cours **4**.*

5. Montrer de deux façons (en utilisant le résultat de la question de cours **5** et, par sommation, à partir des inégalités de la question de cours **4**) que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n).$$

6. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère la fonction :

$$f_n : \begin{array}{ccl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - 1 \end{array}.$$

a. Soit $n \geqslant 2$. Étudier les variations de la fonction f_n et en déduire qu'il existe un unique réel $x_n \in]0,1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

b. En comparant $f_{n+1}(x_{n+1})$ et $f_{n+1}(x_n)$, montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement décroissante.

c. En déduire que la suite (x_n) est convergente.

7. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \sim n!$.

8. Montrer par la démonstration «classique» le lemme de Cesaro : si u est une suite convergente de limite ℓ alors on a

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

9. Soit u la suite réelle donnée par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}.$$

a. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Prouver que : $\mathrm{e}^{u_{n+1}} - \mathrm{e}^{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

c. À l'aide du lemme de Cesaro, montrer que $u_n \sim \ln(n)$.