Objectifs et savoir-faire

- *Fonctions d'une variable réelle :*
  - Justifier et exploiter la continuité, la dérivabilité d'une fonction; étudier les variations et les limites d'une fonction.
  - Utiliser la continuité et la dérivabilité de façon globale (valeurs intermédiaires, fonction continue sur un segment, bijection strictement monotone, Rolle, accroissements finis).
  - Calculer des dérivées successives à l'aide de la formule de Leibniz.
  - Étudier des suites définies par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.
- *Intégration :*
  - Maîtriser les propriétés générales (positivité, croissance, linéarité).
  - Manipuler des inégalités avec des intégrales.
  - Calculer des primitives simples.
  - Intégrer par parties.
  - Effectuer un changement de variable (indiqué) dans une intégrale.
  - Manipuler des sommes de Riemann (avec des subdivisions régulières).
  - Exploiter la formule de Taylor avec reste intégrale (ou l'inégalité de Taylor-Lagrange).

► Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :

1. Étudier la continuité des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} \quad \text{et} \quad g(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2.$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T−périodique (avec $T > 0$).
Montrer que si f a une limite en $+\infty$ alors f est constante.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 et en 1 et telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x^2)$.
Montrer que f est constante.

4. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On suppose que $f(a) = g(b)$ et $f(b) = g(a)$.
Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

5. Soit f et g deux applications continues sur un intervalle $[a, b]$ et à valeurs réelles.
On suppose que : $\forall x \in [a, b],\ f(x) > g(x)$.
Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que : $\forall x \in [a, b],\ f(x) > g(x) + m$.

6. Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}.$$

7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et ℓ un réel tels que :

$$f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} \ell \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell.$$

Montrer, en appliquant le théorème de Rolle à une fonction auxiliaire, qu'il existe un réel c tel que $f'(c) = 0$.

8. Soit u la suite réelle donnée par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos(u_n)$.

a. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $\cos(\alpha) = \alpha$ et que l'on a $\alpha \in [0, 1]$.

b. Justifier (brièvement) le fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \big(\sin(1)\big)^n$.

d. En déduire que la suite u converge vers α.

9. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on considère la fonction : $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x}$.
On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.
Montrer que la suite (u_n) est positive et décroissante puis qu'elle converge vers 0.

10. Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$, on pose $M_1 = \max\{\left|f'(x)\right| \ ;\ a \leqslant x \leqslant b\}$ et :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = a + k\frac{b-a}{n}.$$

Montrer que :

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\right| \leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{2n}.$$

11. Calculer la limite en $+\infty$ de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$.

12. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégrale, montrer que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ x - \frac{1}{6}x^3 \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5.$$