

Objectifs et savoir-faire► *Matrices*

- Calculer des puissances de matrices (intuition et récurrence, binôme de Newton, utilisation d'un polynôme annulateur ou «diagonalisation guidée»).
- Utiliser des puissances de matrices (notamment pour des systèmes de suites récurrentes).

► *Espace vectoriels*

- Montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel par la propriété de stabilité par combinaison linéaire ou à l'aide de la notation Vect.
- Montrer, à l'aide d'un contre-exemple explicite, qu'une partie d'un espace vectoriel n'est pas un sous-espace vectoriel.
- Maîtriser la notion de combinaison linéaire et la notation Vect.
- Constituer un « catalogue » d'espaces vectoriels de référence.
- Montrer qu'une famille est libre / génératrice / une base.
- Maîtriser le vocabulaire lié à la dimension finie.

► **Note aux colleurs :**

- Tous les espaces vectoriels sont réels.
- Pour le moment, la notion de dimension relève du vocabulaire; le but de la colle n'est pas d'utiliser la dimension finie.
- Pas de sommes de s.e.v. pour le moment.
- Attention aux notations pour les espaces de (fonctions) polynômes $\mathbb{R}[x]$ et $\mathbb{R}_k[x]$: on s'autorise la notation x^k à la place de $x \mapsto x^k$.

► **Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :**

1. Calculer les puissances de la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

3. Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. À l'aide d'un polynôme annulateur, calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

5. Pour chacune des parties suivantes de \mathbb{R}^3 , montrer que c'est un s.e.v. de \mathbb{R}^3 par deux méthodes (stabilité par combinaison linéaire et notation Vect) ou montrer que ce n'est pas le cas (en explicitant un contre-exemple à la définition) :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + z = 0\} \text{ et } G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; xy = 0\}.$$

6. Pour chacune des parties suivantes de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que c'est un s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ou montrer que ce n'est pas le cas (en explicitant un contre-exemple à la définition) :

$$F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ; f \text{ impaire}\} \text{ et } G = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ; f \text{ s'annule}\}.$$

7. Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}[x]$, montrer que c'est un s.e.v. de $\mathbb{R}[x]$ ou montrer que ce n'est pas le cas (en explicitant un contre-exemple à la définition) :

$$F = \{P \in \mathbb{R}[x] ; P(0) = 1\} \text{ et } G = \{P \in \mathbb{R}[x] ; x - 1 \text{ divise } P(x)\}.$$

8. Pour chacune des parties suivantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que c'est un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou montrer que ce n'est pas le cas (en explicitant un contre-exemple à la définition) :

$$F = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; A \text{ triangulaire supérieure}\}$$

$$\text{et } G = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; \text{les coefficients diagonaux de } A \text{ sont tous nuls}\}.$$

9. On considère l'ensemble E des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la somme des coefficients diagonaux est nulle. Montrer que c'est un s.e.v. de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par deux méthodes (stabilité par combinaison linéaire et notation Vect).

10. Dans \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs $\mathbf{a} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 0)$ et $\mathbf{c} = (1, 1, 1)$. Montrer que $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ est une famille génératrice de \mathbb{R}^3 .