Objectifs et savoir-faire

- *Séries :*
  - Connaître les séries de référence : séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$, séries géométriques $\sum x^n$ et les deux premières séries géométriques dérivées $\sum nx^{n-1}$ et $\sum n(n-1)x^{n-2}$.
  - Connaître les propriétés des séries convergentes.
  - Étudier la convergence d'une série (par le calcul des sommes partielles ou par utilisation d'une série de référence).
  - Calculer la somme d'une série convergente (par le calcul des sommes partielles ou par utilisation d'une série de référence de somme connue).
  - Utiliser, sur des exemples simples, la formule de Taylor avec reste intégral pour étudier la convergence d'une série et calculer sa somme.
  - Maîtriser les critères de comparaison ($0 \leqslant u_n \leqslant v_n$) et d'équivalence ($u_n \sim v_n$) pour les séries à termes positifs (et rédiger correctement leur utilisation).
  - Maîtriser le critère de négligeabilité ($u_n = o(v_n)$) pour une série à termes quelconques (et rédiger correctement son utilisation).
  - Connaître la notion de convergence absolue et son lien avec la convergence.

► Note aux colleurs :

- La notion de série alternée n'est pas au programme mais le concept a été abordé sur des exemples et le critère de convergence à été démontré en exercice ; il n'est néanmoins pas supposé connu.
- Le critère d'Alembert n'est pas au programme.

► Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :

1. Étudier la nature des séries de terme général :
$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } v_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

2. Étudier la nature des séries de terme général :
$$u_n = \frac{\big(\ln(n)\big)^2}{n^4} \text{ et } v_n = \frac{1}{n \times n^{\frac{1}{n}}}.$$

3. Étudier la nature des séries de terme général :
$$u_n = \frac{\cos(n) - \sin(n)}{n^2} \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2}.$$

4. Étudier la convergence et déterminer la somme des séries de terme général :
$$u_n = n\mathrm{e}^{-n} \text{ et } v_n = \frac{2^n}{(n+2)!}.$$

5. Étudier la convergence et déterminer la somme de la série de terme général :
$$u_n = \frac{4^n}{(2n)!}.$$

6. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose : $u_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$.
Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$:
$$u_n \geqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x,$$
puis en déduire que la série de terme général u_n est divergente.

7. *Critère des séries alternées* – Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante qui converge vers 0, on pose pour tout entier n : $u_n = (-1)^n a_n$ et $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a. Montrer que les suites $(\mathrm{S}_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{S}_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

b. En déduire que la série de terme général u_n est convergente.