Objectifs et savoir-faire

- *Espaces vectoriels*
- *Applications linéaires :*
  - Étudier la linéarité d'une application entre espaces vectoriels.
  - Déterminer noyau et image d'une application linéaire.
  - Maîtriser la notion de projecteur sur un sous-espace vectoriel parallèlement à un autre.
  - Maîtriser le lien entre applications linéaires et matrices.
  - Utiliser le calcul matriciel pour obtenir des informations sur des applications linéaires.
  - Utiliser des applications linéaires pour obtenir des résultats matriciels.
  - Maîtriser les propriétés des applications linéaires en dimension finie (notamment le théorème du rang et le cas où les espaces de départ et d'arrivée ont même dimension).

► **Note aux colleurs :**

- Tous les espaces vectoriels sont réels.
- Seul le cas de deux sous-espaces vectoriels en somme directe est désormais au programme (plus de somme directe de $k \geqslant 3$ sous-espaces).
- Les symétries ne sont pas au programme de première année mais ont été évoquées en remarque en cours.
- La notion de rang n'a pas encore été abordée (mais le théorème du rang a été vu avec la dimension de l'image).
- Attention aux notations pour les espaces de (fonctions) polynômes $\mathbb{R}[x]$ et $\mathbb{R}_k[x]$: on manipule $x \mapsto x^k$... à moins d'introduire des notations idoines dans l'exercice !

► **Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :**

1. On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par :

$$f(x, y, z) = (-x + z, -y + z, x - 2y + z).$$

Montrer que f est linéaire puis déterminer des bases du noyau et de l'image de f (par la méthode de votre choix).

2. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Déterminer une base du noyau et de l'image de l'endomorphisme f de E dont le matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à : $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 5 & -10 & -5 \end{pmatrix}$.

Déterminer le noyau et l'image de f puis vérifier que f est un projecteur.

4. On considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $n + 1$ points $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ de l'intervalle $[a, b]$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que : $\forall i \in [\![0, n]\!],\ P(\alpha_i) = f(\alpha_i)$.

5. Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$ et f l'application défine sur l'espace E par $f(P) = P + P'$.
Montrer que f est un endomorphisme bijectif de E.
En déduire la solution P de $P(x) + P'(x) = x^2 + x + 1$.

6. Soit E un espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E qui commutent.
Montrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.

7. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E.
Montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a : $\ker f^i \subset \ker f^{i+1}$.
En déduire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que : $\ker f^p = \ker f^{p+1}$.