Objectifs et savoir-faire

- *Langage mathématique*
  - Décrire un ensemble de nombres avec rigueur.
  - Maîtriser le vocabulaire «condition nécessaire», «condition suffisante», «il faut», «il suffit», etc.
  - Maîtriser la syntaxe d'utilisation des quantificateurs $\forall$ et $\exists$.
- *Raisonnement*
  - Rédiger un raisonnement par récurrence.
  - Comprendre l'utilité des différentes versions du raisonnement par récurrence.
  - Formaliser un raisonnement par l'absurde, par contraposition, par disjonction de cas.
- *Nombres réels*
  - Exploiter une représentation graphique des nombres réels (notamment avec des valeurs absolues) pour guider un raisonnement.
  - Calculer avec des nombres réels, manipuler des inégalités et des encadrements.
  - Connaître et maîtriser la notion de partie entière d'un réel.
- *Sommes et produits*
  - Connaître et manipuler les symboles $\sum$ et $\prod$.
  - Connaître la notion de factorielle $n!$ d'un entier naturel n.
  - Calculer des sommes (simples, doubles).
  - Calculer avec des coefficients binomiaux, utiliser la formule du binôme de Newton.

► Note aux colleurs :

- les raisonnements par récurrence devront *a priori* reposer sur une hypothèse simple (le cas d'une hypothèse double ou forte devra être guidé) ;
- les sommes à connaître sont $\sum_{k=0}^{n} x^k$ (pour $x \neq 1$), $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$ ainsi que la formule du binôme ;
- attention, les nombres complexes **ne sont plus au programme**.

► Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :

1. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $2^n \geqslant n^3$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que : $\left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

3. Résoudre l'équation d'inconnue réelle x suivante : $\lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor$.

4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour toute fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ bornée, on note :

$$\|f\| = \sup\left\{\left|f(x)\right| \;;\; x \in \mathrm{I}\right\},$$

Montrer que si f et g sont deux fonctions bornées sur I alors $f+g$ est bornée sur I et :

$$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|.$$

5. Soit n un entier avec $n \geqslant 1$, calculer $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \min(i,j)$.

6. Soit n un entier avec $n \geqslant 2$, calculer $\mathrm{P} = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

b. En déduire les deux sommes suivantes : $a = \displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ et $b = \displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0,n]\!]$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$:

- ▹ à l'aide d'un raisonnement par récurrence ;
- ▹ à l'aide d'un télescopage.

9. Soit A et B deux parties d'un ensemble non vide E.

a. Montrer que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ si et seulement si $\mathbf{1}_\mathrm{A} \leqslant \mathbf{1}_\mathrm{B}$.

b. Montrer que : $\mathbf{1}_{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}} = \mathbf{1}_\mathrm{A} + \mathbf{1}_\mathrm{B} - \mathbf{1}_\mathrm{A}\,\mathbf{1}_\mathrm{B}$.