Objectifs et savoir-faire

- *Révisions sur les équations polynomiales de degré 2*
- *Suites réelles*
  - Exprimer en fonction de n une suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique ou donnée par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
  - Étudier des propriétés globales d'une suite (monotonie, caractère borné).
- *Études de fonctions*
  - Représenter une fonction du type $x \mapsto f(kx)$, $x \mapsto f(x+k)$, etc. à partir d'une fonction connue.
  - Maîtriser la notion de composition de fonctions.
  - Maîtriser le vocabulaire «global» lié au fonctions : (im)parité, périodicité, majoré, minoré, borné, monotonie, stricte monotonie.
  - Notion d'asymptote au graphe d'une fonction.
  - Notions intuitives de limite, continuité, dérivabilité, dérivée; formulaire de dérivées usuelles.
  - Connaître les propriétés des fonctions de référence, notamment exp, ln, $x \mapsto x^\alpha$, cos, sin et tan.
  - Connaître les limites par croissances comparées.
  - Étudier les variations d'une fonction et la représenter graphiquement.

► **Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :**

1. *Inégalité de Cauchy-Schwarz*
   Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tous réels **non nuls** $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, on a :
   $$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right),$$
2. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2 et donnée sur $[-1,1]$ par :
   $$\forall x \in [-1,1],\ f(x) = |x|.$$
   Représenter graphiquement (en expliquant) la fonction f sur l'intervalle $[-5,5]$ puis déterminer l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Étudier la monotonie des suites u et v données par :
   $$u_n = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{n^n}{n!}.$$
4. Montrer que la suite x donnée par $x_0 = 12$ et :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \sqrt{x_n + 4},$$
   est bien définie et bornée.
5. Montrer que la suite x donnée par $u_0 = 1$ et :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n},$$
   est bien définie et étudier sa monotonie.
6. Montrer qu'une suite périodique est bornée.
7. Montrer qu'une suite arithmétique est caractérisée par la propriété suivante : « chaque terme est la moyenne du terme qui le précède et de celui qui le suit. »
8. Énoncer et démontrer (en utilisant des manipulations du symbole $\sum$) la formule donnant la somme des termes d'une suite arithmétique puis d'une suite géométrique.