Exercice 1 (Python)

Définir avec Python la fonction f donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

```python
def f(x):
    if x<0:
        return 0
    elif 0 <= x <= 1:
        return x
    else:
        return 1
```

Exercice 2

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1.$$

Montrons par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$ la propriété :

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } \sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1 \text{ ».}$$

• Pour $n = 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{1} k \times k! = 1 = (1+1)! - 1$$

d'où $\mathscr{P}(1)$.

• Soit $n \geqslant 1$ tel que l'on ait $\mathscr{P}(n)$. Montrons que l'on a $\mathscr{P}(n+1)$.
L'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$ donne :

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$$

d'où :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = (n+1)! - 1 + (n+1) \times (n+1)!$$

puis en factorisant le terme $(n+1)!$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = (n+1)!\big(1 + (n+1)\big) - 1$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = \times (n+1)! \times (n+1) - 1 = (n+2)! - 1$$

et l'on a $\mathscr{P}(n+1)$.

• Par récurrence, on a donc $\mathscr{P}(n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$ c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = (n+1)! - 1.}$$

Exercice 3

Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{N}$ la suite u définie par :

$$u_0 = 10 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = 3.$$

La suite u est arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison 3 donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + 3n$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 10 + 3n.}$$