Exercice 1

On considère les fonctions suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+x+1 \end{array}, \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x-2 \end{array}, \quad h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x \end{array}.$$

Donner, pour tout réel x, les expressions de $(\exp\circ f\circ h)(x)$ et de $(g\circ \ln\circ f\circ \cos)(x)$.

Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}(\exp\circ f\circ h)(x) &= \mathrm{e}^{f(h(x))}\\ &= \mathrm{e}^{f(3x)}\\ &= \mathrm{e}^{(3x)^2+3x+1}\end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{(\exp\circ f\circ h)(x) = \mathrm{e}^{9x^2+3x+1}}$$

et

$$\begin{aligned}(g\circ \ln\circ f\circ \cos)(x) &= g\big(\ln\big(f\big(\cos(x)\big)\big)\big)\\ &= g\big(\ln\big(\cos^2(x)+\cos(x)+1\big)\big)\end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{(g\circ \ln\circ f\circ \cos)(x) = \big(\ln\big(\cos^2(x)+\cos(x)+1\big)\big)-2.}$$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant la relation :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = (u_n)^2.$$

Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = (u_0)^{2^n}.$$

Montrons par récurrence sur l'entier $n\in\mathbb{N}$, la propriété :

$$\mathscr{P}(n) : « u_n = (u_0)^{2^n} ».$$

• On a $2^0 = 1$ donc $u_0 = (u_0)^{2^0}$ et on a $\mathscr{P}(0)$.

• Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que l'on ait $\mathscr{P}(n)$. Montrons que l'on a $\mathscr{P}(n+1)$.
Par définition de la suite et par l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$:

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= (u_n)^2\\ &= \left((u_0)^{2^n}\right)^2\\ &= (u_0)^{2^n\times 2}\\ &= (u_0)^{2^{n+1}}\end{aligned}$$

d'où $\mathscr{P}(n+1)$.

• Par récurrence, on a donc $\mathscr{P}(n)$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = (u_0)^{2^n}.}$$

Exercice 3

Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ la suite u définie par :

$$u_1 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2u_{n+1} = u_n.$$

Tout d'abord, l'hypothèse s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n.$$

La suite u est géométrique de premier terme $u_1 = 3$ et de raison $\frac{1}{2}$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{3}{2^{n-1}}.}$$