Exercice 1

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \dfrac{1}{2}x^2 \leqslant \cos(x)$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \cos(x).$$

La fonction $x \mapsto 1 - \frac{1}{2}x^2$ est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de deux fonctions dérivables.
Pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = -x + \sin(x).$$

Les fonction $x \mapsto -x$ et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc leur somme également. Donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, on note f'' sa dérivée. Pour tout réel x, on a :

$$f''(x) = -1 + \cos(x) \leqslant 0.$$

On en déduit que f' est décroissante sur $\mathbb{R}$ or $f'(0) = 0$ donc f' est positive sur $\mathbb{R}_-$ et négative sur $\mathbb{R}_+$.
On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
Comme $f(0) = 0$, il s'ensuit que f est toujours négative, d'où :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \cos(x).}$$

Exercice 2

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!$$

Montrons par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$, la propriété :

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } \sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)! \text{ ».}$$

• On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k! = 1$ et $(0+1)! = 1$ donc on a $\mathscr{P}(0)$.
• Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $\mathscr{P}(n)$. Montrons que l'on a $\mathscr{P}(n+1)$.
Par l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k! &= \sum_{k=0}^{n} k! + (n+1)! \\ &\leqslant (n+1)! + (n+1)! \\ &\leqslant 2 \times (n+1)!\end{aligned}$$

or $2 \leqslant n+2$ donc :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k! \leqslant (n+2)!$$

et l'on a $\mathscr{P}(n+1)$.

• Par récurrence, on a donc $\mathscr{P}(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!.}$$

Exercice 3

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i+j=n}} i\ j$.

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i+j=n}} i\ j &= \sum_{i=1}^{n} i\ (n-i) \\
&= n\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= n\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{1}{2}n(n+1)\left(n - \frac{2n+1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2}n(n+1)\frac{3n-2n-1}{3}
\end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i+j=n}} i\ j = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}.}$$