Exercice

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

1. Étudier le domaine de définition $\mathscr{D}$ de f.
2. Étudier la parité (ou l'imparité) de f. Que peut-on en déduire sur le domaine d'étude ?
3. Étudier le domaine de dérivabilité de f puis calculer l'expression $f'(x)$.
4. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}$ puis dresser le tableau de variations de f.
5. La représentation graphique de f admet-elle des asymptotes ?
6. Représenter graphiquement la fonction f.
7. Résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x (en fonction de y).

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $1+|x| \geqslant 0$ donc le dénominateur ne s'annule jamais.
Donc la fonction f est définie sur $\boxed{\mathscr{D} = \mathbb{R}.}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{-x}{1+|-x|} \\ &= -\frac{x}{1+|x|} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

donc $\boxed{f \text{ est impaire.}}$

Il s'ensuit qu' $\boxed{\text{il suffit d'étudier } f \text{ sur } [0,+\infty[.}$

3. Sur $[0,+\infty[$, on a :

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

donc f coïncide sur cet intervalle avec une fonction rationnelle donc f est dérivable sur $[0,+\infty[$.
Par imparité, on en déduit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
En fait, la dérivabilité en 0 n'est pas si claire. Revenons donc à la définition :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{\frac{x}{1+|x|} - 0}{x-0} \\ &= \frac{1}{1+|x|} \\ &\xrightarrow[x\to 0]{} 1 \end{aligned}$$

ce qui signifie que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$.

Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} \quad i.e. \quad f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

4. Pour $x \geqslant 0$, on a :

$$f(x) = \frac{x}{1+x} \quad i.e. \quad f(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}+1}$$

d'où :

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

et, par imparité de f, on en déduit :

$$f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1.$$

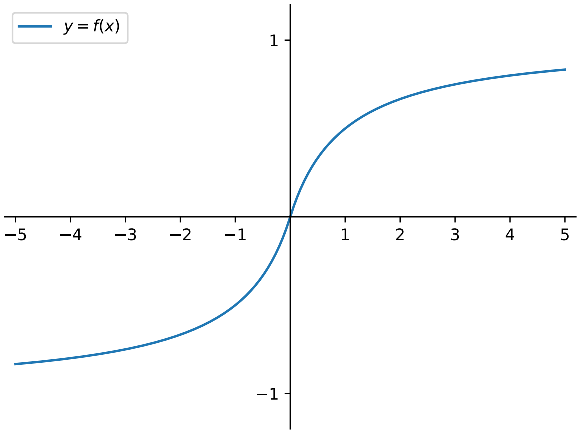
On en déduit le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	1	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

5. La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ admet des limites finies en l'infini donc :

- le graphe de f admet la droite d'équation $y = 1$ pour asymptote en $+\infty$;
- le graphe de f admet la droite d'équation $y = -1$ pour asymptote en $-\infty$.

6. La représentation graphique est la suivante :



7. • D'après le tableau de variations de f, si $y \notin]-1,1[$ alors l'équation $y = f(x)$ n'admet pas de solution.

• Soit $y \in [0,1[$, d'après le tableau de variation, l'équation $y = f(x)$ ne peut avoir une solution que pour $x \geqslant 0$ donc on a :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{x}{1+|x|} \\ &\iff y = \frac{x}{1+x} \\ &\iff y + yx = x \\ &\iff y = x(1-y) \\ &\iff x = \frac{y}{1-y} \quad (\text{car } y \neq 1). \end{aligned}$$

• Soit $y \in]-1,0]$, d'après le tableau de variation, l'équation $y = f(x)$ ne peut avoir une solution que pour $x \leqslant 0$ donc on a :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{x}{1+|x|} \\ &\iff y = \frac{x}{1-x} \\ &\iff y - yx = x \\ &\iff y = x(1+y) \\ &\iff x = \frac{y}{1+y} \quad (\text{car } y \neq -1). \end{aligned}$$

En résumé, l'équation $y = f(x)$ n'admet pas de solution pour $y \notin]-1,1[$ et, sinon, admet exactement une solution x vérifiant :

$$x = \frac{y}{1-|y|}.$$