Exercice 1 (Python)

Étudier puis représenter graphiquement avec Python la fonction f donnée par :

$$f(x) = \ln(1+x) + \mathrm{e}^{-x}.$$

▷ La fonction $x \to -x$ est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Donc, par composition, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \to 1+x$ est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$; en particulier, elle est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$.
La fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$.
Donc, par composition, la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$.
Par somme, la fonction f est donc dérivable sur $]-1,+\infty[$.

▷ Pour tout $x > -1$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - \mathrm{e}^{-x} \\ &= \frac{1-(1+x)\mathrm{e}^{-x}}{1+x}. \end{aligned}$$

À ce stade, on peut étudier la fonction correspondant à l'expression au numérateur ou écrire :

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{e}^{x}-(1+x)}{1+x}$$

or on a $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc :

$$\forall x > -1,\ f'(x) > 0.$$

▷ Pour les limites, on écrit :

$$\ln(1+x) \xrightarrow[x\to -1]{} -\infty \text{ et } \mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to -1]{} \mathrm{e}$$

donc :

$$f(x) \xrightarrow[x\to -1]{} -\infty.$$

D'autre part, on a :

$$\ln(1+x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty \text{ et } \mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$$

donc :

$$f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty.$$

▷ Enfin, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

or par croissances comparées :

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x)}{1+x}\,\frac{1+x}{x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$$

donc :

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0.$$

Puisque la limite de $f(x) - 0 \times x$ est infinie en $+\infty$, il n'y a donc pas d'asymptote en $+\infty$ (on dit en revanche qu'il y a une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des x).

▷ On peut désormais dresser le tableau de variations de f.

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

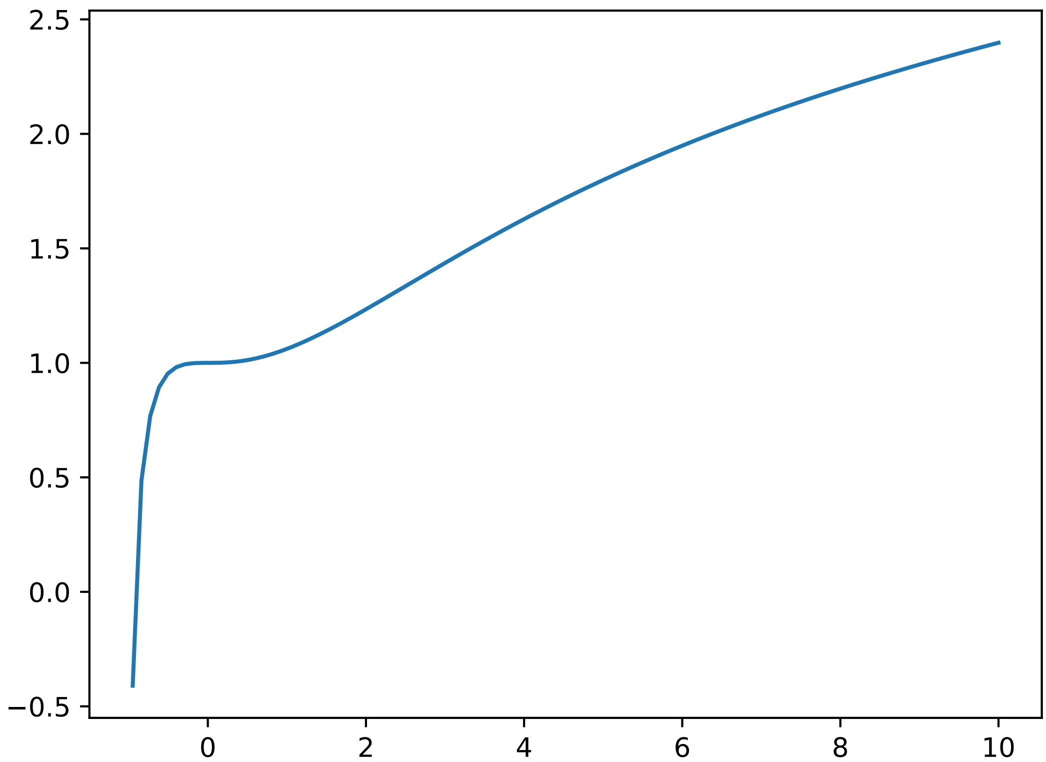
▷ La représentation graphique à l'aide de Python peut s'obtenir ainsi :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return np.log(1+x) + np.exp(-x)

X = np.linspace(-0.95,10,100)
plt.plot(X, f(X))
plt.show()
```

On obtient :



Exercice 2

Exprimer u_n en fonction de n dans les cas suivants :

1. $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - 4$;

2. $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.

1. Soit ℓ un réel, on a :

$$\ell = 3\ell - 4 \iff \ell = 2.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - 2 = 3u_n - 6 \ \ i.e.\ \ u_{n+1} - 2 = 3(u_n - 2),$$

ce qui signifie que la suite $(u_n - 2)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - 2 = 3^n(u_0 - 2) \ \text{ donc } \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 - 3^n.}$$

2. Soit r un nombre réel :

$$\begin{aligned} r^2 = 6r - 9 &\iff r^2 - 6r + 9 = 0 \\ &\iff (r-3)^2 = 0 \\ &\iff r = 3 \end{aligned}$$

donc il existe des réels λ et μ tels que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda n + \mu)3^n.$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} \mu = 2 \\ (\lambda + \mu) \times 3 = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \mu = 2 \\ \lambda + \mu = \frac{1}{3} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \mu = 2 \\ \lambda = -\frac{5}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(-\frac{5}{3}n + 2\right)3^n.}$$

Exercice 3

1. Montrer que pour tous réels x et y, on a :

$$x^2 + y^2 \geqslant 2xy.$$

2. On considère trois réels positifs ou nuls a, b et c, montrer que :

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geqslant 8abc.$$

1. Soit x et y deux réels, on a :

$$(x-y)^2 \geqslant 0,$$

ce qui donne en développant :

$$x^2 - 2xy + y^2 \geqslant 0$$

et finalement :

$$x^2 + y^2 \geqslant 2xy.$$

2. On considère des réels positifs ou nuls a, b et c. Le résultat de la question précédente permet d'écrire :

$$a^2+1 \geqslant 2a \geqslant 0 \ , \ b^2+1 \geqslant 2b \geqslant 0 \ \text{ et } \ c^2+1 \geqslant 2c \geqslant 0$$

d'où par produit (d'inégalités entre nombres **positifs**) :

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geqslant 8abc$$

et l'on a bien montré : $\boxed{\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+)^3,\ (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geqslant 8abc.}$