**Exercice 1 (Python)**

Étudier puis représenter graphiquement avec Python la fonction $f$ donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

On commencera par étudier le domaine de définition et la parité de la fonction.

▷ Notons $\mathscr{D}$ le domaine de définition de $f$. Soit $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
x \in \mathscr{D} &\iff 1-x \neq 0 \text{ et } \frac{1+x}{1-x} > 0 \\
&\iff x \neq 1 \text{ et } \left( \begin{cases} 1+x>0 \\ 1-x>0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 1+x<0 \\ 1-x<0 \end{cases} \right) \\
&\iff x \neq 1 \text{ et } \left( \begin{cases} x>-1 \\ x<1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x<-1 \\ x>1 \end{cases} \right) \\
&\iff \begin{cases} x>-1 \\ x<1 \end{cases}
\end{aligned}$$

donc le domaine de définition de $f$ est $]-1,1[$.

▷ Soit $x \in ]-1,1[$, on a $-x \in ]-1,1[$ et :

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\
&= -f(x)
\end{aligned}$$

donc $f$ est impaire et il suffit de l'étudier sur l'intervalle $[0,1[$.

▷ La fonction rationnelle $x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$ est dérivable sur $]-1,1[$ et, d'après l'étude ci-dessus, à valeurs dans $]0,+\infty[$.
La fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$.
Donc, par composition, la fonction $f$ est dérivable sur $]-1,1[$.

▷ Pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}\frac{1-x-(-1)(1+x)}{(1-x)^2}\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{2}{(1-x)^2}\frac{1-x}{1+x} \\
&= \frac{1}{1-x^2} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

▷ On a en composant des limites :

$$\frac{1+x}{1-x} \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty \text{ donc } f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty.$$

▹ On peut désormais dresser le tableau de variations de $f$.

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $+$ | $1$ | $+$ | $\Vert$ |
| $f(x)$ | $\Vert$ $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ $\Vert$ |

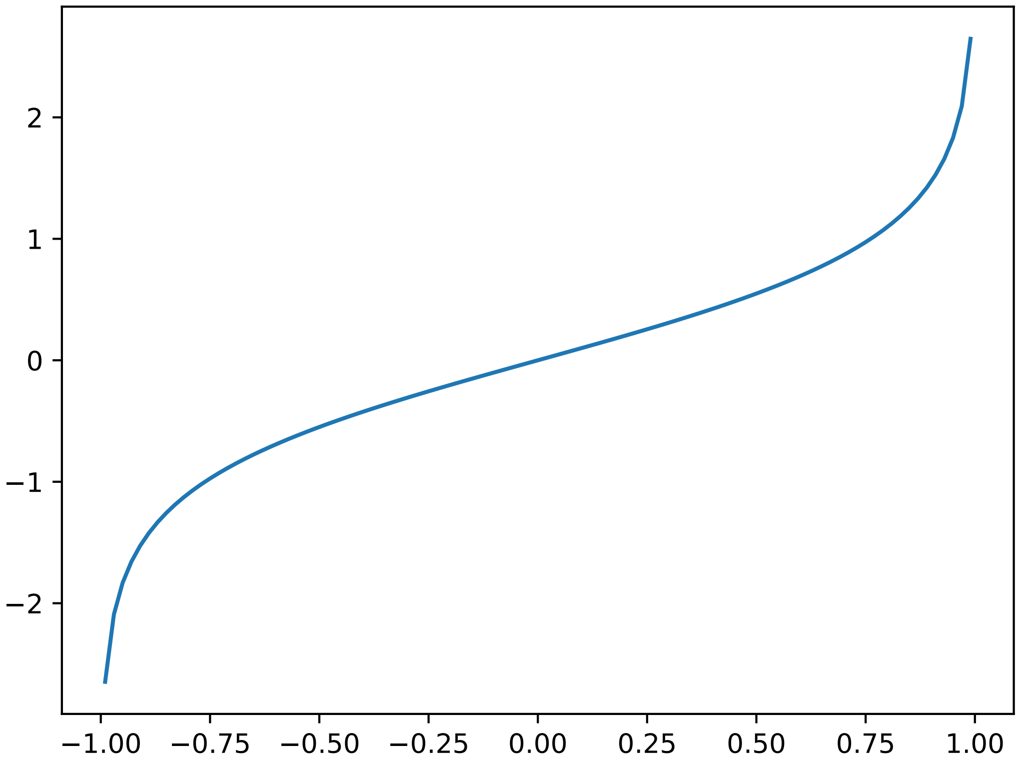
▹ Pour représenter la fonction en Python, on peut utiliser le programme suivant.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return 1/2*np.log((1+x)/(1-x))

X = np.linspace(-0.99,0.99,100)
plt.plot(X, f(X))
plt.show()
```

On obtient le graphe suivant :



**Exercice 2**

Exprimer $u_n$ en fonction de $n$ dans les cas suivants :

**1.** $u_0 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n + 2$ ;

**2.** $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -3u_{n+1} + 4u_n$.

**1.** Soit $\ell$ un réel, on a :

$$\ell = -\ell + 2 \iff \ell = 1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - 1 = -u_n + 2 - 1 \ \ i.e.\ \ u_{n+1} - 1 = -(u_n - 1),$$

ce qui signifie que la suite $(u_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison -1. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - 1 = (-1)^n(u_0 - 1) \ \text{ donc } \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + (-1)^n.}$$

**2.** Soit $r$ un nombre complexe :

$$\begin{aligned} r^2 = -3r + 4 &\iff r^2 + 3r - 4 = 0 \\ &\iff (r-1)(r+4) = 0 \\ &\iff r = 1 \text{ ou } r = -4 \end{aligned}$$

donc il existe des réels $\lambda$ et $\mu$ tels que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda 1^n + \mu(-4)^n = \lambda + \mu(-4)^n.$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = -1 \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda + \ \ \mu = 1 \\ \lambda - 4\mu = -1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda + \ \ \mu = 1 \\ \quad -5\mu = -2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda \ = \frac{3}{5} \\ \mu = \frac{2}{5} \end{cases}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}(-4)^n.}$$

---

**Exercice 3**

Soit $a$ et $b$ deux nombres réels avec $a \leqslant b$.
Montrer que le nombre d'entiers dans l'intervalle $[a, b]$ est égal à $\lfloor b \rfloor + \lfloor 1 - a \rfloor$.

• Tout d'abord, si $a$ est un entier alors les entiers dans l'intervalle $[a, b]$ sont $a, a+1, \ldots, \lfloor b \rfloor$, c'est-à-dire les $a + k$ avec $k \in [\![0, \lfloor b \rfloor - a]\!]$ donc il y en a :

$$\lfloor b \rfloor - a + 1.$$

Qui plus est, si $a$ est un entier alors $-a+1$ est un entier donc $-a+1 = \lfloor 1 - a \rfloor$ et le nombre d'entiers dans l'intervalle $[a, b]$ est bien $\lfloor b \rfloor + \lfloor 1 - a \rfloor$.

• Si $a$ n'est pas entier alors les entiers dans l'intervalle $[a, b]$ sont ceux de l'intervalle $[\lfloor a\rfloor + 1, b]$ et, d'après le cas précédent, il y en a :

$$\lfloor b\rfloor - \left(\lfloor a\rfloor + 1\right) + 1 = \lfloor b\rfloor - \lfloor a\rfloor.$$

D'autre part, puisque $a$ n'est pas un entier, on a :

$$\lfloor a\rfloor < a < \lfloor a\rfloor + 1 \ \text{ donc } \ -\lfloor a\rfloor - 1 < -a < -\lfloor a\rfloor,$$

puis :

$$-\lfloor a\rfloor < 1 - a < -\lfloor a\rfloor + 1,$$

ce qui signifie que $\lfloor 1 - a\rfloor = -\lfloor a\rfloor$ et l' nombre d'entiers dans l'intervalle $[a, b]$ est donc bien encore égal à $\lfloor b\rfloor + \lfloor 1 - a\rfloor$.

Dans tous les cas, le nombre d'entiers de l'intervalle $[a, b]$ est donc bien :

$$\boxed{\lfloor b\rfloor + \lfloor 1 - a\rfloor.}$$