Exercice 1 (Python)

Étudier et représenter graphiquement (avec Python) la fonction f donnée par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - x}.$$

On commencera par étudier le domaine de définition et celui de dérivabilité de la fonction.

▷ La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant x+1 \ \text{ donc } \ \mathrm{e}^x \neq x$$

donc le dénominateur ne s'annule jamais. Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto -x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc, par somme et quotient de fonctions dérivables (le quotient ne s'annulant pas), la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - x) - \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1)}{(\mathrm{e}^x - x)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x(1-x)}{(\mathrm{e}^x - x)^2}. \end{aligned}$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$.
▷ On a :

$$\mathrm{e}^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 \ \text{ et } \ -x \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$$

donc par opérations usuelles sur les limites :

$$f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0.$$

La représentation graphique de f admet l'axe des abscisses pour asymptote lorsque x tend vers $-\infty$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a en simplifiant par e^x :

$$f(x) = \frac{1}{1 - x\mathrm{e}^{-x}}$$

or, par croissances comparées :

$$x\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

donc :

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$

La représentation graphique de f admet la droite d'équation $y = 1$ pour asymptote lorsque x tend vers $+\infty$.
▷ On peut désormais dresser le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$	$\searrow$	1

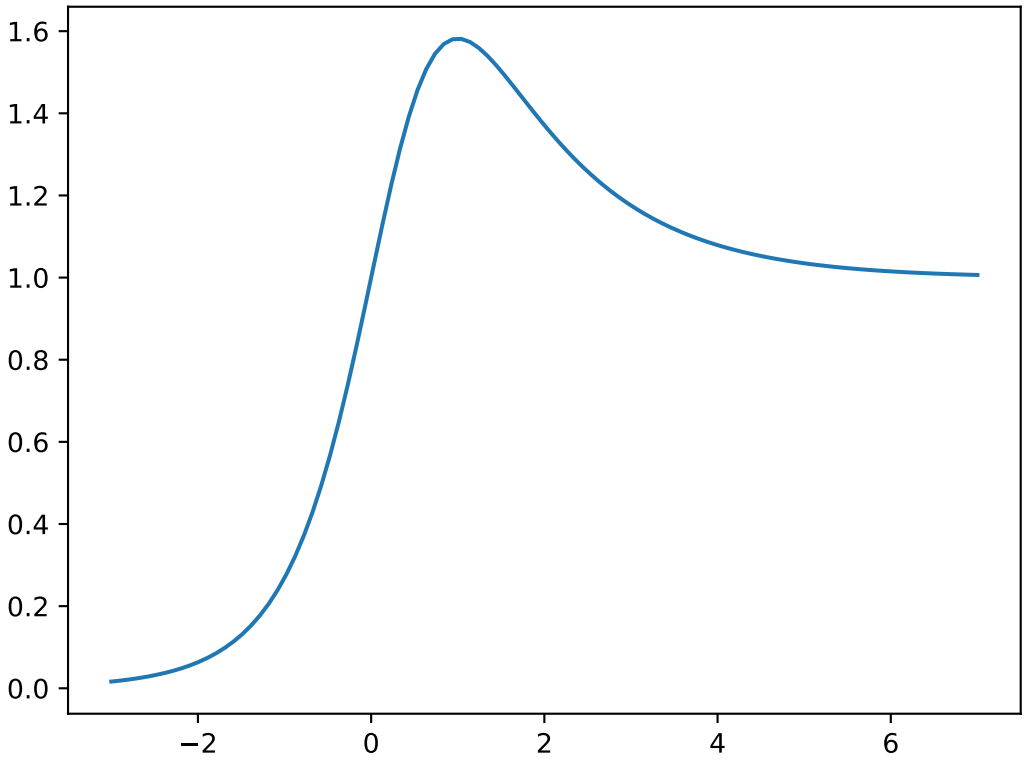
▷ Pour représenter la fonction en Python, on peut utiliser le programme suivant.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


def f(x):
    return np.exp(x) / (np.exp(x) - x)

X = np.linspace(-3,7,100)
plt.plot(X, f(X))
plt.show()
```

On obtient le graphe suivant :



Exercice 2

Soit u une suite arithmétique ne s'annulant pas. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0 u_{n+1}}.$$

On suppose que $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r.

◇ *Première méthode : raisonnement par récurrence*
Montrons par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$ la propriété :

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0 u_{n+1}} \text{ ».}$$

• On a :

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{1}{u_0 u_1}$$

d'où $\mathscr{P}(0)$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $\mathscr{P}(n)$. Montrons que l'on a $\mathscr{P}(n+1)$.
L'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{u_k u_{k+1}} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} + \frac{1}{u_{n+1} u_{n+2}} \\
&= \frac{n+1}{u_0 u_{n+1}} + \frac{1}{u_{n+1} u_{n+2}} \\
&= \frac{(n+1) u_{n+2} + u_0}{u_0 u_{n+1} u_{n+2}}.
\end{aligned}$$

La suite étant arithmétique de raison r, on a :

$$\begin{aligned}
(n+1) u_{n+2} + u_0 &= (n+1)(u_{n+1} + r) + u_0 \\
&= (n+1) u_{n+1} + ((n+1) r + u_0) \\
&= (n+1) u_{n+1} + u_{n+1}
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{u_k u_{k+1}} &= \frac{(n+2) u_{n+1}}{u_0 u_{n+1} u_{n+2}} \\
&= \frac{n+2}{u_0 u_{n+2}}
\end{aligned}$$

et l'on a $\mathscr{P}(n+1)$.

• Par récurrence, on a donc $\mathscr{P}(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0 u_{n+1}}.}$$

◇ *Deuxième méthode : on utilise un télescopage*
On s'inspire de l'égalité $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ pour remarquer que :

$$\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}} = \frac{u_{k+1} - u_k}{u_k u_{k+1}} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}} = \frac{r}{u_k u_{k+1}}$$

d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{r}\left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}}\right) \\
&= \frac{1}{r}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_{k+1}}\right) \\
&= \frac{1}{r}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{u_k}\right) \\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_{n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{r}\frac{u_{n+1} - u_0}{u_0 u_{n+1}}
\end{aligned}$$

or $u_{n+1} = u_0 + (n+1)r$ donc :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0 u_{n+1}}.}$$