

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul. Calculer les sommes :

$$a = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \quad b = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad c = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}.$$

Exercice 2

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer les entiers naturels k tels que :

$$\lfloor \sqrt{k} \rfloor = m.$$

2. Soit $n \geq 0$. Calculer en fonction de n :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n^2+2n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor.$$

Exercice 3

On considère la fonction φ donnée pour tout réel x par :

$$\varphi(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

1. Étudier avec soin le domaine de définition et le domaine de dérivabilité \mathcal{D} de φ .
2. Vérifier que φ est impaire.
3. Calculer l'expression de $\varphi'(x)$ pour tout réel x de \mathcal{D} .
4. Déterminer les limites de φ aux bornes de son intervalle de définition puis dresser son tableau de variations.