

Objectifs et savoir-faire

- ▶ Probabilités sur un univers fini.
 - Reconnaître une situation de probabilité uniforme.
 - Utiliser les formules des probabilités totales, des probabilités composées, de Bayes.
 - Maîtriser la notion de probabilité conditionnelle.
 - Comprendre et utiliser la notion d'indépendance (deux à deux, mutuelle) d'événements.
- ▶ Variables aléatoires réelles finies :
 - Maîtriser les notions générales : v.a. finie, loi d'une v.a., représentation de la loi.
 - Maîtriser la notion d'espérance d'une v.a. : définition, calcul, positivité, croissance, linéarité, théorème de transfert $E(u(x)) = \sum_{x \in X(\Omega)} u(x)P(X = x)$.
 - Maîtriser les notions de variance et d'écart-type : définitions, formule de Koenig-Huygens, positivité de la variance, $V(aX + b) = a^2V(X)$.
 - Connaître quelques lois de référence : loi certaine, loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale.

▶ Note aux colleurs :

- Pour le moment, l'univers est toujours fini.
- Au premier semestre, les fonctions de répartition ne sont pas étudiées.

▶ Note aux étudiants :

- La calculatrice peut être utile en colle, penser à la prendre !

▶ Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :

1. On tire 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir un full? un brelan (mais pas mieux)? deux paires (mais pas mieux)? au moins deux as?
2. Un lot de dés contient 25% de dés pipés pour lesquels la probabilité d'obtenir 6 est de 0,5. On choisit un dé au hasard.
 - a. On lance le dé, on obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé?
 - b. On relance le dé et on obtient à nouveau 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé?

3. En vue du dépistage d'une maladie, on a mis au point un test. Si le patient est atteint, le test donne un résultat positif dans 99% des cas. Si le patient est en bonne santé, le test donne quand-même un résultat positif dans 2% des cas (des *faux positifs*). On sait qu'en moyenne, un patient sur 1000 est atteint.

Quelle est la probabilité pour qu'un patient, choisi au hasard, soit atteint par la maladie, sachant que son test est positif?

4. On considère des événements A, B et C sur un univers fini Ω .

a. Montrer que si A et B sont indépendants alors A et \bar{B} sont indépendants.

b. Montrer que si A, B et C sont mutuellement indépendants alors A, B et \bar{C} sont également mutuellement indépendants.

c. Montrer que si A, B et C sont mutuellement indépendants alors A et $B \cup C$ sont indépendants.

5. Calculer l'espérance et la variance d'une loi binomiale.

6. Une urne contient n boules numérotées de 1 à N. On effectue deux tirages d'une boule avec remise.

On note X la variable aléatoire égale à la différence entre le plus grand numéro obtenu et le plus petit.

Déterminer la loi de X puis calculer son espérance.

7. La probabilité d'observer une maladie dans une population est 0,1. La maladie peut être détectée sans erreur par un dosage sanguin. On considère une population de 100 personnes, toutes indépendantes les unes des autres.

On forme, au hasard, n groupes de $k = \frac{100}{n}$ personnes. Au lieu de tester les 100 personnes individuellement, on teste le mélange des sérums d'un groupe : si le test est négatif alors on considère que les k personnes sont saines et on est dispensé de k tests individuels ; si le test est positif alors on teste individuellement les k personnes du groupe.

a. Soit Y le nombre de personnes malades dans un groupe. Calculer $p = P(Y \geq 1)$ en fonction de n .

b. On note X la v.a. comptant le nombre de groupes pour lesquels le test est positif et N la v.a. comptant le nombre total de tests à effectuer avec cette méthode.

Quel est le lien entre N et X ?

c. Exprimer l'espérance de N en fonction de n .

d. À l'aide d'un outil informatique (calculatrice, Python,...) déterminer n afin que $E(N)$ soit minimale.