Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul. Calculer les sommes :

$$a=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\quad,\quad b=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}\quad\text{et}\quad c=\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}.$$

Tout d'abord, la formule du binôme de Newton donne :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=(1+1)^n\ \text{ donc }\ \boxed{a=2^n.}$$

Pour la deuxième somme, on peut tout d'abord remarquer que :

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$$

or :

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\ \binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

donc :

$$b=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}\ \text{ i.e. }\ b=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}.$$

Un décalage d'indices donne alors :

$$b=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}$$

et le même calcul que pour a donne :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}=2^{n-1}\quad\text{donc}\quad\boxed{b=n2^{n-1}.}$$

Pour la troisième somme, on a de façon analogue :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}&=\sum_{k=0}^{n}(k^2-k+k)\binom{n}{k}\\
&=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}\\
&=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}+n2^{n-1}\\
&=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\,\frac{n}{k}\,\frac{n-1}{k-1}\binom{n-2}{k-2}+n2^{n-1}\\
&=n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}+n2^{n-1}\\
&=n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}+n2^{n-1}\\
&=n(n-1)\,2^{n-2}+n2^{n-1}\\
&=n\,2^{n-2}\,(n-1+2)
\end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{c=n(n+1)2^{n-2}.}$$

Exercice 2

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer les entiers naturels k tels que :

$$\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = m.$$

2. Soit $n \geqslant 0$. Calculer en fonction de n :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n^2+2n} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor.$$

1. Soit $m \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = m &\iff m \leqslant \sqrt{k} < m+1 \\
&\iff m^2 \leqslant k < (m+1)^2 \\
&\iff m^2 \leqslant k \leqslant (m+1)^2 - 1
\end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = m \iff k \in [\![m^2, m^2+2m]\!].}$$

2. Soit $n \geqslant 0$, on a tout d'abord :

$$\begin{aligned}
[\![0, n^2+2n]\!] &= \{0\} \cup [\![1,3]\!] \cup [\![4,8]\!] \cup [\![9,15]\!] \cup [\![16,31]\!] \cup \cdots [\![(n-1)^2, n^2+2n]\!] \\
&= \biguplus_{m=0}^{n-1} [\![m^2, m^2+2m]\!]
\end{aligned}$$

(le symbole ci-dessus signifiant que l'union est disjointe) d'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n^2+2n} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor &= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=m^2}^{m^2+2m} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=m^2}^{m^2+2m} m \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} m(2m+1) \\
&= 2\sum_{m=0}^{n-1} m^2 + \sum_{m=0}^{n-1} m \\
&= 2\frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} \\
&= (n-1)n\left(\frac{2n-1}{3} + \frac{1}{2}\right) \\
&= (n-1)n\frac{4n-2+3}{6}
\end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{u_n = \frac{(n-1)n(4n+1)}{6}.}$$

Exercice 3

On considère la fonction φ donnée pour tout réel x par :

$$\varphi(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

1. Étudier avec soin le domaine de définition et le domaine de dérivabilité $\mathscr{D}$ de φ.
2. Vérifier que φ est impaire.
3. Calculer l'expression de $\varphi'(x)$ pour tout réel x de $\mathscr{D}$.
4. Déterminer les limites de φ aux bornes de son intervalle de définition puis dresser son tableau de variations.

1. ▷ Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $\mathscr{D}_0$ le domaine de définition de f alors, sachant que la fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ et que la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$x \in \mathscr{D}_0 \iff x^2+1 \geqslant 0 \text{ et } x + \sqrt{x^2+1} > 0.$$

La condition $x^2+1 \geqslant 0$ est toujours vérifiée. D'autre part, on a par croissance de la fonction racine carrée :

$$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \text{ donc } x + \sqrt{x^2+1} > x + |x| \geqslant 0$$

donc $\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

▷ La fonction $x \mapsto x^2+1$ est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et ses valeurs sont dans $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par composition, la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$).
La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, par somme, la fonction $x \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
La fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ et l'on a vu ci-dessus que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ x + \sqrt{x^2+1} > 0$$

donc, par composition, $\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned}
\varphi(-x) &= \ln\left(-x + \sqrt{(-x)^2+1}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\right) \\
&= \ln\left(\frac{x^2+1-x^2}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= -\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \\
&= -\varphi(x)
\end{aligned}$$

et $\boxed{\varphi \text{ est impaire.}}$ On peut donc se contenter de l'étudier sur $[0, +\infty[$.

3. Posons tout d'abord $u(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$u'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \quad i.e. \quad u'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\varphi'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

d'où :

$$\varphi'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}$$

puis en simplifiant :

$$\boxed{\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.}$$

4. Par opérations sur les limites, on a :

$$x + \sqrt{x^2+1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad \ln(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$$

donc, par composition de limites :

$$\varphi(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

On peut alors dresser le tableau de variations de φ.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	1	$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$