Exercice 1

Étudier la suite u donnée par $u_0 = \frac{1}{2}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

Tout d'abord, il n'y a pas de problème de définition de la suite.
Pour tout entier n, on a de plus :

$$u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$$

donc $\boxed{\text{la suite } u \text{ est décroissante.}}$
Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - x^2$$

de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il s'agit d'une fonction polynôme du deuxième degré et la mise de l'expression de $f(x)$ sous forme canonique donne :

$$f(x) = -(x^2 - x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

ce qui conduit au tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	$\frac{1}{4}$ $\searrow$	0 $\searrow$	$-\infty$

On a en particulier $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$ (on dit que cet intervalle est stable par f).
Montrons alors par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$, la propriété :

$$\mathscr{P}(n) :\ \text{« } 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2} \text{ ».}$$

∘ On a $u_0 = \frac{1}{2}$ d'où $\mathscr{P}(0)$.
∘ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $\mathscr{P}(n)$.
Par hypothèse de récurrence, on a $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
Puisque $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est stable par f, on a :

$$f(u_n) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

c'est-à-dire :

$$u_{n+1} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

et l'on a $\mathscr{P}(n+1)$.
∘ On en déduit par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}.}$$

Puisque <u>la suite u</u> est décroissante et minorée (par 0), elle <u>converge.</u>
Notons ℓ la limite de u alors c'est également la limite de sa sous-suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et la relation de récurrence vérifiée par la suite conduit à la relation :

$$\ell = \ell - \ell^2$$

donc $\ell = 0$ donc :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. En Python, définir la fonction g.
2. *a.* Justifier la dérivabilité de la fonction g sur $]0, +\infty[$.

   b. La fonction g est-elle continue en 0 ?
3. *a.* Calculer la dérivée de g sur $]0, +\infty[$.

   b. Étudier les variations de g et dresser le tableau de variations.
4. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto h(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - e^{-x}$.

   a. Justifier la dérivabilité de h sur $\mathbb{R}$

   b. Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   c. Justifier la dérivabilité de h' sur $\mathbb{R}$, on note h'' sa dérivée.

   d. Calculer $h''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   e. Quelles sont les valeurs de $h(0)$, $h'(0)$ et $h''(0)$?
5. *a.* Montrer que $0 \leqslant h''(x) \leqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$.

   b. En déduire un encadrement de $h'(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.

   c. Montrer que $0 \leqslant h(x) \leqslant \frac{1}{6}x^3$ pour tout $x \geqslant 0$.
6. En déduire que un encadrement de $\dfrac{1 - e^{-x} - x}{x^2}$ pour $x > 0$.
7. Montrer que g est dérivable en 0 et préciser la valeur de $g'(0)$.

1.

```
from math import exp

def g(x):
    if x > 0:
        return (1 - exp(-x)) / x
    elif x == 0:
        return 1
```

2. *a.* La fonction $x \mapsto 1 - e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme composée et somme de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}$).

La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0.

Par quotient, $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[.}$

b. On a :

$$\frac{e^u - 1}{u} \xrightarrow[u \to 0]{} 1$$

donc par composition de limites :

$$\frac{e^{-x} - 1}{-x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

ce qui signifie :

$$g(x) \xrightarrow[x \to 0]{} g(0)$$

donc $\boxed{g \text{ est continue en } 0.}$

On en déduit que g est continue sur $[0, +\infty[$.

3. ***a.*** Pour tout $x > 0$, on a :

$$g'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}x - (1 - \mathrm{e}^{-x})}{x^2} \quad i.e. \quad \boxed{g'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{e}^{x} - (1 + x)}{x^2}.}$$

b. Pour tout $x > 0$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $x^2 > 0$. De plus, on sait que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{t} \geqslant t + 1$$

ce qui donne :

$$\forall x > 0,\ g'(x) < 0.$$

On en déduit le tableau de variations de g.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	1 ↘	0

Notons que la dernière question du problème précise que g est dérivable en 0 donc on dresse le tableau de variations sans indiquer de non dérivabilité en ce point.
Par ailleurs, la limite en $+\infty$ s'obtient sans difficulté :

$$1 - \mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 \quad \text{donc} \quad \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

4. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto h(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \mathrm{e}^{-x}$.

a. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}$.
La fonction polynomiale $x \mapsto 1 - x + \frac{1}{2}x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Par somme, $\boxed{h \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$

b. Pour tout réel x, on a :

$$\boxed{h'(x) = -1 + x + \mathrm{e}^{-x}.}$$

c. Comme ci-dessus, h' est la somme d'une fonction polynomiale et de la fonction dérivable $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ donc $\boxed{h' \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$

d. Pour tout réel x, on a :

$$\boxed{h''(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.}$$

e. On a : $\boxed{h(0) = 0,\ h'(0) = 0 \text{ et } h''(0) = 0.}$

5. ***a.*** Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $\mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$ d'où l'inégalité de gauche.
D'autre part, pour tout réel t, on a $\mathrm{e}^{t} \geqslant t + 1$ donc, pour tout réel $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-x} \geqslant -x + 1$ ce qui conduit à $1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant x$.
On a donc bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant h''(x) \leqslant x.}$$

b. La double inégalité de la question précédente permet d'écrire pour tout $x \geqslant 0$:

$$\int_0^x 0\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x h''(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t\,\mathrm{d}t,$$

soit :

$$0 \leqslant \left[h'(t)\right]_0^x \leqslant \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^x,$$

puis :

$$0 \leqslant h'(x) - h'(0) \leqslant \frac{1}{2}x^2.$$

Puisque $h'(0) = 0$, on en déduit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant h'(x) \leqslant \frac{1}{2}x^2.}$$

Notons que l'on pourrait également démontrer ces inégalités par des études de fonctions.

c. On utilise la même idée. Pour tout $x \geqslant 0$, on a :

$$\int_0^x 0\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x h'(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{1}{2}t^2\,\mathrm{d}t,$$

soit :

$$0 \leqslant \Big[h(t)\Big]_0^x \leqslant \left[\frac{1}{6}t^3\right]_0^x,$$

puis :

$$0 \leqslant h(x) - h(0) \leqslant \frac{1}{6}x^3.$$

Puisque $h(0) = 0$, on en déduit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant h(x) \leqslant \frac{1}{6}x^3.}$$

6. On a montré que :

$$\forall x \geqslant 0,\ 0 \leqslant 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{1}{6}x^3.$$

On en déduit que :

$$\forall x \geqslant 0,\ -\frac{1}{2}x^2 \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-x} - x \leqslant \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

puis

$$\boxed{\forall x > 0,\ -\frac{1}{2} \leqslant \frac{1 - \mathrm{e}^{-x} - x}{x^2} \leqslant \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}.}$$

7. Soit $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} &= \frac{\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} - 1}{x}\\ &= \frac{1 - \mathrm{e}^{-x} - x}{x^2}\end{aligned}$$

et la question précédente donne :

$$\forall x > 0,\ -\frac{1}{2} \leqslant \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \leqslant \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}.$$

Puisque le majorant tend vers $-\frac{1}{2}$ quand x tend vers 0^+, on déduit du théorème d'encadrement :

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\frac{1}{2}.$$

Par conséquent, la fonction $\boxed{g \text{ est dérivable en } 0}$ et on a $\boxed{g'(0) = -\frac{1}{2}.}$