**Exercice 1**

Étudier la suite $u$ donnée par $u_0 = \frac{1}{2}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

**Exercice 2**

Soit $g$ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

**1.** En Python, définir la fonction $g$.

**2.** ***a.*** Justifier la dérivabilité de la fonction $g$ sur $]0, +\infty[$.

***b.*** La fonction $g$ est-elle continue en 0 ?

**3.** ***a.*** Calculer la dérivée de $g$ sur $]0, +\infty[$.

***b.*** Étudier les variations de $g$ et dresser le tableau de variations.

**4.** Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto h(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \mathrm{e}^{-x}$.

***a.*** Justifier la dérivabilité de $h$ sur $\mathbb{R}$

***b.*** Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

***c.*** Justifier la dérivabilité de $h'$ sur $\mathbb{R}$.

***d.*** Calculer $h''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

***e.*** Quelles sont les valeurs de $h(0)$, $h'(0)$ et $h''(0)$ ?

**5.** ***a.*** Montrer que $0 \leqslant h''(x) \leqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$.

***b.*** En déduire un encadrement de $h'(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.

***c.*** Montrer que $0 \leqslant h(x) \leqslant \frac{1}{6}x^3$ pour tout $x \geqslant 0$.

**6.** En déduire que un encadrement de $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}-x}{x^2}$ pour $x > 0$.

**7.** Montrer que $g$ est dérivable en 0 et préciser la valeur de $g'(0)$.