Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme :

$$S = \sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} \frac{j}{i}.$$

Puisque l'on sait «sommer» les j mais pas les $\frac{1}{i}$, l'ordre de sommation n'est pas anodin !

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} \frac{j}{i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \left(\sum_{j=1}^{i} j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \left(\frac{i(i+1)}{2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2} n \\ &= \frac{n(n+1)+2n}{4} \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{S = \frac{n(n+3)}{4}.}$$

Exercice 2 (Python)

Étudier et représenter graphiquement (avec Python) la fonction f donnée par :

$$f(x) = \frac{e^x}{|x-1|}.$$

On commencera par étudier le domaine de définition et celui de dérivabilité.

▷ La fonction f est définie en un réel x si seulement si $|x-1| \neq 0$ *i.e.* $x \neq 1$. Donc le domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
La fonction $x \mapsto x-1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en 1.
La fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc par composition la fonction $x \mapsto |x-1|$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par quotient (le dénominateur ne s'annulant pas), la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

▷ Pour tout $x > 1$, on a :

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}$$

donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

donc, pour $x > 1$, $f'(x)$ est du signe de $x-2$.
Pour tout $x < 1$, on a :

$$f(x) = \frac{e^x}{1-x}$$

donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(1-x)-(-1)e^x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{e^x(2-x)}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

donc, pour $x < 1$, $f'(x) > 0$.

▷ On a par croissances comparées :

$$\frac{e^x}{x-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

D'autre part, par opérations sur les limites :

$$\frac{e^x}{1-x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0.$$

D'autre part :

$$\frac{1}{1-x} \xrightarrow[x\to1^-]{} +\infty \text{ donc } \frac{e^x}{1-x} \xrightarrow[x\to1^-]{} +\infty$$

et :

$$\frac{1}{x-1} \xrightarrow[x\to1^+]{} +\infty \text{ donc } \frac{e^x}{x-1} \xrightarrow[x\to1^+]{} +\infty.$$

On peut désormais dresser le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	$+\infty$

▷ Pour représenter la fonction en Python, on peut utiliser le programme suivant.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return np.exp(x) / abs(x - 1)

X = np.linspace(-3,0.9,100)
plt.plot(X, f(X), 'b')
X = np.linspace(1.1,4,100)
plt.plot(X, f(X), 'b')
plt.show()
```

On obtient le graphe suivant :