

Exercice

Cet énoncé fait suite à l'exercice 1 du DS 2. En particulier, on a adopté les notations suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}.$$

Ces trois fonctions ont été étudiées dans l'exercice mentionné.

On cherche à prouver que $\lambda \geq \frac{1}{2}$ est une condition nécessaire et suffisante de la propriété suivante, notée $[\star]$:

$$\forall x \geq 0, f(x) \leq e^{\lambda x^2} \quad [\star].$$

1. On pose pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_\lambda(x) = \lambda x^2 - \ln(f(x)).$$

a. La fonction φ_λ est-elle bien définie?

b. Étudier la dérivabilité de φ_λ et calculer sa dérivée.

c. On suppose dans cette question que $\lambda \geq \frac{1}{2}$. Prouver à l'aide d'une étude de fonction que $\varphi'_\lambda(x)$ est du signe de x .

d. En déduire que $\lambda \geq \frac{1}{2}$ est une condition suffisante de $[\star]$.

2. Prouver l'inégalité suivante :

$$\forall x \geq 0, f(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}.$$

3. Prouver l'inégalité suivante :

$$\forall u \geq 0, \ln(1+u) \geq u - \frac{u^2}{2}.$$

4. On suppose dans cette question la propriété $[\star]$ vérifiée.

a. Prouver que :

$$\forall x \geq 0, \lambda x^2 \geq \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}.$$

b. En déduire que $\lambda \geq \frac{1}{2}$.

1. **a.** On a montré que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc la composée $\ln \circ f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction polynôme $x \mapsto \lambda x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Par combinaison linéaire, la fonction φ_λ est définie sur $\mathbb{R}$.

b. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc, par composition, la fonction $x \mapsto \ln(f(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction polynôme $x \mapsto \lambda x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par combinaison linéaire, la fonction φ_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , on a :

$$\varphi'_\lambda(x) = 2\lambda x - \frac{f'(x)}{f(x)}$$

c'est-à-dire :

$$\varphi'_\lambda(x) = 2\lambda x - \frac{g(x)}{f(x)} = 2\lambda x - h(x).$$

c. La fonction polynôme $x \mapsto 2\lambda x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par combinaison linéaire, la fonction φ'_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, on a pour tout réel x :

$$\varphi''_\lambda(x) = 2\lambda - (1 - h(x))^2.$$

Puisque dans cette question il est supposé que $\lambda \geq \frac{1}{2}$, on a $2\lambda - 1 \geq 0$ donc :

$$\varphi''_\lambda(x) = 2\lambda - 1 + h(x)^2 \geq 0.$$

De plus, on a :

$$\varphi'_\lambda(0) = 2\lambda \times 0 - h(0) = 0.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'_\lambda(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

En particulier, $\varphi'_\lambda(x)$ est du signe de x .

d. On en déduit ensuite le tableau de variation de φ_λ :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi_\lambda(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

En particulier, la condition $\lambda \geq \frac{1}{2}$ implique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_\lambda(x) \geq 0$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda x^2 \geq \ln(f(x))$$

et par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{\lambda x^2} \geq f(x).$$

Donc $\lambda \geq \frac{1}{2}$ est une condition suffisante de $[\star]$.

2. Définissons une fonction α sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\alpha(x) = f(x) - 1 - \frac{x^2}{2}$$

alors α est la somme de la fonction f , dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et d'une fonction polynôme (donc également dérivable sur $\mathbb{R}_+$) donc la fonction α est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \alpha'(x) = f'(x) - x = g(x) - x$$

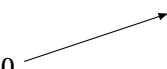
or g et $x \mapsto x$ sont également dérivables sur $\mathbb{R}_+$ donc α' est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \alpha''(x) = g'(x) - 1 = f(x) - 1$$

et l'étude de la fonction f donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \alpha''(x) = f(x) - 1 \geq 0.$$

On en déduit les tableaux de variations suivants :

x	0	$+\infty$
$\alpha''(x)$	+	
$\alpha'(x)$	0 	

puis :

x	0	$+\infty$
$\alpha'(x)$	+	
$\alpha(x)$	0 	

En particulier, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \alpha(x) \geq 0$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall x \geq 0, f(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}.$$

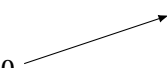
3. Définissons une fonction β sur $[0, +\infty[$ en posant :

$$\beta(u) = \ln(1+u) - u + \frac{u^2}{2}$$

alors β est la somme de la $u \mapsto \ln(1+u)$, dérivable sur $[0, +\infty[$, et d'une fonction polynôme (donc également dérivable sur $[0, +\infty[$) donc la fonction β est dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a :

$$\forall u \in [0, +\infty[, \beta'(u) = \frac{1}{1+u} - 1 + u = \frac{u^2}{1+u}$$

ce qui conduit au tableau de variations suivant :

u	0	$+\infty$
$\beta'(u)$	+	
$\beta(x)$	0 	

En particulier, on obtient :

$$\forall u \in [0, +\infty[, \beta(u) \geq 0$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall u \in [0, +\infty[, \ln(1+u) \geq u - \frac{u^2}{2}.$$

4. **a.** Par hypothèse, on a :

$$\forall x \geq 0, f(x) \leq e^{\lambda x^2}$$

d'où (puisque $f(x) > 0$) :

$$\forall x \geq 0, \ln(f(x)) \leq \lambda x^2.$$

La question 2 et la croissance de la fonction $\ln$ donnent par ailleurs :

$$\forall x \geq 0, \ln(f(x)) \geq \ln\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)$$

puis la question 3 donne :

$$\forall x \geq 0, \ln\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \geq \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^2.$$

En regroupant ces trois égalités, on obtient pour tout $x \geq 0$:

$$\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^2 \leq \ln\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \leq \ln(f(x)) \leq \lambda x^2$$

donc :

$$\boxed{\forall x \geq 0, \lambda x^2 \geq \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}.$$

b. La question précédente permet d'écrire en divisant par x^2 lorsque $x \neq 0$:

$$\forall x > 0, \lambda \geq \frac{1}{2} - \frac{x^2}{8}$$

d'où, en faisant tendre x vers 0 : $\boxed{\lambda \geq \frac{1}{2}.$