Exercice

Cet énoncé fait suite à l'exercice 1 du DS 2. En particulier, on a adopté les notations suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right), \quad g(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}.$$

Ces trois fonctions ont été étudiées dans l'exercice mentionné.

On cherche à prouver que $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$ est une condition nécessaire et suffisante de la propriété suivante, notée [$\star$] :

$$\forall x \geqslant 0, f(x) \leqslant e^{\lambda x^2} \quad [\star] \ .$$

1. On pose pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_\lambda(x) = \lambda x^2 - \ln\big(f(x)\big).$$

a. La fonction φ_λ est-elle bien définie ?

b. Étudier la dérivabilité de φ_λ et calculer sa dérivée.

c. On suppose dans cette question que $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$. Prouver à l'aide d'une étude de fonction que $\varphi'_\lambda(x)$ est du signe de x.

d. En déduire que $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$ est une condition suffisante de [$\star$].

2. Prouver l'inégalité suivante :

$$\forall x \geqslant 0, \ f(x) \geqslant 1 + \frac{x^2}{2}.$$

3. Prouver l'inégalité suivante :

$$\forall u \geqslant 0, \ \ln(1+u) \geqslant u - \frac{u^2}{2}.$$

4. On suppose dans cette question la propriété [$\star$] vérifiée.

a. Prouver que :

$$\forall x \geqslant 0, \ \lambda x^2 \geqslant \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}.$$

b. En déduire que $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$.