

Exercice

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 , avec $u_0 > 0$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n + u_n^2.$$

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Pour $n \geq 0$ on pose : $v_n = \frac{1}{2^n} \ln(u_n)$.

a. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et qu'à partir d'un certain rang (que l'on ne cherchera pas à préciser), on a :

$$v_{n+1} \leq v_n + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

b. En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

On note α la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on ne cherchera pas à calculer α .

3. a. Montrer que pour tout $x > -1$, on a : $\ln(1+x) \leq x$.

b. En déduire que pour tous n et p dans $\mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq v_{n+p} - v_n \leq \frac{1}{2^n u_n}.$$

c. Montrer que :

$$2^n \alpha - \ln(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.

4. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k u_k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0,$$

donc la suite (u_n) est croissante.

Si la suite (u_n) convergeait alors sa limite ℓ vérifierait $\ell = \ell + \ell^2$, soit $\ell = 0$, ce qui est impossible puisque la suite est croissante et que $u_0 > 0$.

Donc (u_n) ne converge pas or c'est une suite croissante donc :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

2. a. Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2^{n+1}} \ln(u_{n+1}) - \frac{1}{2^n} \ln(u_n) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \ln(u_n(1 + u_n)) - \frac{1}{2^{n+1}} \ln(u_n^2) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\frac{1 + u_n}{u_n}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \\ &> 0 \end{aligned}$$

donc la suite (v_n) est croissante.

De plus :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

et $0 < 1$ donc, à partir d'un certain rang, on a :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) < 1,$$

puis (sachant que l'expression de gauche est positive) :

$$\frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) < \frac{1}{2^{n+1}},$$

ce qui induit :

$$v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

b. Notons n_0 un entier à partir duquel on a la relation précédente, alors pour tout entier $n \geq n_0$:

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}},$$

soit par télescopage :

$$v_n - v_{n_0} \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}},$$

puis, puisque $\frac{1}{2} \neq 1$:

$$\begin{aligned} v_n - v_{n_0} &\leq \frac{1}{2^{n_0+1}} \sum_{k=0}^{n-n_0-1} \frac{1}{2^k} \\ &\leq \frac{1}{2^{n_0+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-n_0}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2^{n_0}} \left(1 - \frac{1}{2^{n-n_0}}\right) \\ &\leq \frac{1}{2^{n_0}}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall n \geq n_0, v_n \leq v_{n_0} + \frac{1}{2^{n_0}}.$$

La suite v est croissante et majorée donc v converge.

3. a. Considérons la fonction f définie pour tout $x > -1$ par :

$$f(x) = \ln(1+x) - x.$$

Il s'agit d'une différence de deux fonctions usuelles dérivables donc f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et l'on a :

$$\forall x > -1, f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 \text{ i.e. } f'(x) = \frac{-x}{1+x}.$$

Il s'ensuit que $f'(x)$ est du signe de $-x$ sur $] -1, +\infty[$ d'où le tableau de variations de f :

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	$+$	$-$
$f(x)$	$\parallel$	0	$\searrow$

On en déduit notamment :

$$\forall x > -1, f(x) \leq 0,$$

ce qui donne compte tenu de la définition de f :

$$\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x.$$

b. Tout d'abord, la croissance de la suite v donne l'inégalité de gauche.

On a vu que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$v_{k+1} - v_k = \frac{1}{2^{k+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_k}\right)$$

et la question précédente donne donc pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$v_{k+1} - v_k \leq \frac{1}{2^{k+1}} \frac{1}{u_k}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, on déduit de la relation précédente :

$$\sum_{k=n}^{n+p-1} (v_{k+1} - v_k) \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{2^{k+1}} \frac{1}{u_k}$$

soit, par télescopage :

$$v_{n+p} - v_n \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{2^{k+1}} \frac{1}{u_k}.$$

Comme la suite u est croissante, on a :

$$\forall k \in [n, n+p-1], u_k \geq u_n > 0,$$

donc :

$$\forall k \in [n, n+p-1], \frac{1}{u_k} \leq \frac{1}{u_n},$$

d'où :

$$v_{n+p} - v_n \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{2^{k+1}} \frac{1}{u_n},$$

puis :

$$v_{n+p} - v_n \leq \frac{1}{u_n} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^k},$$

soit, puisque $\frac{1}{2} \neq 1$:

$$v_{n+p} - v_n \leq \frac{1}{u_n} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{u_n} \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right),$$

et finalement :

$$0 \leq v_{n+p} - v_n \leq \frac{1}{u_n 2^n}.$$

c. La relation précédente et la définition de la suite v donnent :

$$0 \leq 2^n v_{n+p} - 2^n v_n \leq \frac{1}{u_n},$$

soit :

$$0 \leq 2^n v_{n+p} - \ln(u_n) \leq \frac{1}{u_n}.$$

Puisque la suite v tend vers α , il vient en faisant tendre p vers $+\infty$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq 2^n \alpha - \ln(u_n) \leq \frac{1}{u_n}.$$

Comme la suite (u_n) tend vers $+\infty$, on a :

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

d'où par théorème d'encadrement :

$$\boxed{2^n \alpha - \ln(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.}$$

On déduit de la limite précédente :

$$e^{2^n \alpha - \ln(u_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

soit :

$$\frac{e^{2^n \alpha}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

ce qui signifie :

$$\boxed{u_n \sim e^{2^n \alpha}.$$

4. Comme la suite u est croissante, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$0 < \frac{1}{u_k} \leq \frac{1}{u_0} \text{ donc } 0 < \frac{1}{2^k u_k} \leq \frac{1}{u_0} \frac{1}{2^k},$$

d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k u_k} \leq \frac{1}{u_0} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \\ &\leq \frac{1}{u_0} \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \text{ puisque } \frac{1}{2} \neq 1 \\ &\leq \frac{2}{u_0} \end{aligned}$$

Donc la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k u_k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

Par ailleurs, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^k u_k} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k u_k} = \frac{1}{2^{n+1} u_{n+1}} > 0$$

donc la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k u_k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Puisque c'est une suite croissante et majorée,

$$\boxed{\text{la suite } \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k u_k}\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}}$$