Exercice

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 , avec $u_0 > 0$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n + u_n^2.$$

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Pour $n \geq 0$ on pose : $v_n = \frac{1}{2^n} \ln(u_n)$.

a. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et qu'à partir d'un certain rang (que l'on ne cherchera pas à préciser), on a :

$$v_{n+1} \leq v_n + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

b. En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

On note α la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on ne cherchera pas à calculer α .

3. a. Montrer que pour tout $x > -1$, on a : $\ln(1+x) \leq x$.

b. En déduire que pour tous n et p dans $\mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq v_{n+p} - v_n \leq \frac{1}{2^n u_n}.$$

c. Montrer que :

$$2^n \alpha - \ln(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.

4. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k u_k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.