Objectifs et savoir-faire

- *Systèmes linéaires*
  - Résoudre un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.
  - Résoudre un système en discutant selon les valeurs d'un paramètre.
- *Matrices*
  - Maîtriser les opérations algébriques sur les matrices.
  - Comprendre la notion d'inversibilité d'une matrice et le lien avec les systèmes linéaires.
  - Calculer l'inverse d'une matrice.

► **Note aux colleurs :**

- pas de théorie sur les systèmes linéaires, seulement la pratique de résolution ;
- pas de techniques de calcul des puissances d'une matrice pour le moment.

► **Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :**

1. Résoudre, en fonction du réel a, le système suivant :

$$(\mathrm{S}_a)\ \begin{cases} 3x+2y-\ \ z=3 \\ \ \ x+ay+az=0 \\ -x+2y+2z=0 \end{cases}.$$

2. Résoudre, en fonction de la valeur du réel λ, le système suivant :

$$(\mathrm{S}_\lambda)\ \begin{cases} \ \ x-2y+2z=\lambda x \\ -2x+\ \ y-2z=\lambda y \\ \ \ 2x-2y+\ \ z=\lambda z \end{cases}.$$

3. Trouver l'inverse éventuel des matrices suivantes :

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\ ,\ \mathrm{B}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\ \text{ et }\ \mathrm{C}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

4. Soit $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. Exprimer A^2 en fonction de A et I_3 puis en déduire A^{-1}.

5. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, on note $\mathrm{E}_{i,j}$ la matrice dont le seul coefficient non nul est celui à la place (i,j) qui vaut 1. Soit $(i,j,k,\ell)\in[\![1,n]\!]^2$, calculer $\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell}$.

6. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures A et B est une matrice triangulaire supérieure et que les coefficients diagonaux de AB sont les produits de ceux de A et de B.

7. Soit $\mathrm{A}\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B}\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^t(\mathrm{AB}) = {}^t\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{A}$.