Exercice 1 (Python)

On considère la suite u donnée par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}.$$

On rappelle que la fonction racine carrée peut être importée en Python à l'aide de l'instruction :

```
from math import sqrt
```

Écrire en Python une fonction `suite(n)` d'argument un entier `n` et renvoyant la liste des `n` + 1 premiers termes de la suite u.

```
from math import sqrt

def suite(n):
    L = [0]
    u = 0
    for k in range(n):
        u = sqrt(u + 2)
        L.append(u)
    return L
```

On obtient par exemple :

```
>>> suite(5)
[0, 1.4142135623730951, 1.8477590650225735, 1.9615705608064609, 1.9903694533443939,
   1.9975909124103448]
```

Exercice 2

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

2. Montrer que les suites u et v définies ci-dessous, pour $n \geqslant 1$, sont adjacentes :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}.$$

▷ **1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ est décroissante sur l'intervalle $[n, n+1]$ ce qui permet d'écrire :

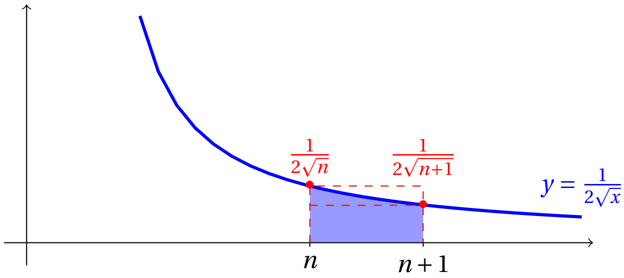
$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

donc :

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \left[\sqrt{x}\right]_n^{n+1} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

soit :

$$\boxed{\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}.}$$



On peut aussi plus simplement écrire :

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

or :

$$2\sqrt{n+1} \geqslant \sqrt{n+1}+\sqrt{n} \geqslant 2\sqrt{n} > 0$$

donc :

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

d'où :

$$\boxed{\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+2} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\Big(\underbrace{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}_{\geqslant \frac{1}{2\sqrt{n+1}}}\Big) \\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

donc u est croissante.
De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1}-v_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\Big(\underbrace{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}_{\geqslant \frac{1}{2\sqrt{n+1}}}\Big) \\
&\leqslant 0
\end{aligned}$$

donc v est décroissante. Enfin, on a :

$$\begin{aligned}
v_n - u_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\right) \\
&= 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}
\end{aligned}$$

donc (en utilisant la première question) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

or :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

et par théorème d'encadrement :

$$v_n - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Donc $\boxed{\text{les suites } u \text{ et } v \text{ sont adjacentes.}}$

Exercice 3

Une urne contient 5 boules noires, 6 boules blanches et 2 boules rouges.
On tire simultanément 3 boules.

1. Quelle est la probabilité de tirer trois boules de couleurs différentes ?

2. Sachant que l'une des boules tirées est noire, quelle est la probabilité que les deux autres soit rouges ?

▷ L'univers Ω est l'ensemble des parties à 3 éléments de l'ensemble des 13 boules et le tirage étant effectué «au hasard» la probabilité $\mathbb{P}$ est uniforme.

1. Notons D l'événement « on tire trois boules de couleurs différentes ».
Il y a $\binom{13}{3}$ tirages possibles.
Le nombre de tirages comportant une boule de chaque couleur est :

$$\binom{5}{1}\binom{6}{1}\binom{2}{1} = 60.$$

Donc la probabilité cherchée est :

$$\mathbb{P}(\mathrm{D}) = \frac{60}{\binom{13}{3}} = \frac{60 \times 6}{13 \times 12 \times 11} \quad i.e. \; \mathbb{P}(\mathrm{D}) = \frac{30}{143}.$$

2. Notons N l'événement « on tire au moins une boule noire » et R l'événement « on tire une boule noire et deux boules rouges », on cherche :

$$\mathbb{P}_{\mathrm{N}}(\mathrm{R}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{N} \cap \mathrm{R})}{\mathbb{P}(\mathrm{N})}.$$

On a :

$$\mathbb{P}(\mathrm{N} \cap \mathrm{R}) = \frac{\binom{5}{1}\binom{2}{2}}{\binom{13}{3}}$$

et :

$$\mathbb{P}(\mathrm{N}) = 1 - \frac{\binom{8}{3}}{\binom{13}{3}}$$

d'où :

$$\mathbb{P}_{\mathrm{N}}(\mathrm{R}) = \frac{\frac{\binom{5}{1}\binom{2}{2}}{\binom{13}{3}}}{1 - \frac{\binom{8}{3}}{\binom{13}{3}}}$$

soit :

$$\mathbb{P}_{\mathrm{N}}(\mathrm{R}) = \frac{\binom{5}{1}\binom{2}{2}}{\binom{13}{3} - \binom{8}{3}}$$

et finalement :

$$\mathbb{P}_{\mathrm{N}}(\mathrm{R}) = \frac{1}{46}.$$