Exercice 1 (Python)

Écrire en Python une fonction `puissance(n)` d'argument un entier `n` et qui renvoie le couple formé de la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à `n` et de la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à $\mathtt{n}^2$. Par exemple, on doit obtenir :

```
>>> puissance(10)
(3, 6)
>>> puissance(3)
(1, 3)
>>> puissance(25)
(4, 9)
```

```
def puissance(n):
    k = 0
    p = 1
    while p <= n:
        p = 2 * p
        k = k + 1
    u = k - 1
    while p <= n**2:
        p = 2 * p
        k = k + 1
    return u, k-1
```

Exercice 2

Montrer que les suites u et v définies ci-dessous pour tout $n \in \mathbb{N}$ sont adjacentes :

$$u_n = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = 1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

donc u est croissante, et :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(1 + \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) - \left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

or $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$ et la fonction sin est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc

$$v_{n+1} - v_n = \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \leqslant 0$$

donc v est décroissante.
Enfin, on a :

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Donc les suites u et v sont adjacentes.

Exercice 3

Dans une fromagerie, on élabore des meules d'emmental qui peuvent représenter trois défauts de fabrication :

- défaut de densité (trop ou pas assez de trous) : 1 meule sur 100 ;
- présence de listéria : 2 meules sur 100 ;
- présence de dioxine : 12 meules sur 1000.

On suppose que ces défauts apparaissent indépendamment les uns des autres. On choisit une meule au hasard ; quelle est la probabilité qu'elle présente l'un de ces défauts au moins.

▷ Notons T l'événement « il y a un problème de densité », L l'événement « il y a un problème de listéria » et D l'événement « il y a un problème de dioxine ».
La probabilité cherchée est celle de l'événement $\mathrm{T} \cup \mathrm{L} \cup \mathrm{D}$. On a (cf. exercice C-64) :

$$\mathbb{P}(\mathrm{T} \cup \mathrm{L} \cup \mathrm{D}) = \mathbb{P}(\mathrm{T}) + \mathbb{P}(\mathrm{L}) + \mathbb{P}(\mathrm{D}) - \mathbb{P}(\mathrm{T} \cap \mathrm{L}) - \mathbb{P}(\mathrm{L} \cap \mathrm{D}) - \mathbb{P}(\mathrm{D} \cap \mathrm{T}) + \mathbb{P}(\mathrm{T} \cap \mathrm{L} \cap \mathrm{D}).$$

Puisque ces trois événements sont supposés mutuellement indépendants, on en déduit :

$$\mathbb{P}(\mathrm{T} \cup \mathrm{L} \cup \mathrm{D}) = \mathbb{P}(\mathrm{T}) + \mathbb{P}(\mathrm{L}) + \mathbb{P}(\mathrm{D}) - \mathbb{P}(\mathrm{T})\mathbb{P}(\mathrm{L}) - \mathbb{P}(\mathrm{L})\mathbb{P}(\mathrm{D}) - \mathbb{P}(\mathrm{D})\mathbb{P}(\mathrm{T}) + \mathbb{P}(\mathrm{T})\mathbb{P}(\mathrm{L})\mathbb{P}(\mathrm{D})$$

d'où en utilisant les valeurs numériques :

$$\mathbb{P}(\mathrm{T} \cup \mathrm{L} \cup \mathrm{D}) = \frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{12}{1000} - \frac{1}{100}\frac{2}{100} - \frac{2}{100}\frac{12}{1000} - \frac{12}{1000}\frac{1}{100} + \frac{1}{100}\frac{2}{100}\frac{12}{1000}$$

soit :

$$\mathbb{P}(\mathrm{T} \cup \mathrm{L} \cup \mathrm{D}) = \frac{51803}{1250000}.$$