Exercice 1 (Python)

Écrire une fonction `proportion(ch)` prenant en argument une chaîne de caractères en minuscules non accentuées et qui renvoie la proportion d'utilisation de la lettre e parmi toutes les lettres de `ch`.
Par exemple, on doit obtenir :

```
>>> proportion("bonjour")
0.0
>>> proportion("ceci est un exemple de plus !")
0.2727272727272727
>>> proportion("encore un exemple extremement elementaire")
0.35135135135135137
```

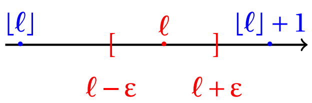
```
def proportion(ch):
    nb_e = 0  # compteur des e
    nb_l = 0  # compteur des autres lettres
    for x in ch:
        if x == 'e':
            nb_e = nb_e + 1
        elif x in "abcdfghijklmnopqrstuvwxyz":
            nb_l = nb_l + 1
    return nb_e / (nb_e + nb_l)
```

Exercice 2

Soit (u_n) une suite réelle convergente de limite ℓ.

1. Si $\ell \notin \mathbb{Z}$ montrer que $(\lfloor u_n \rfloor)_n$ converge alors vers $\lfloor \ell \rfloor$.
   Indication : se représenter la situation avec un dessin puis utiliser la définition.
2. Sinon, montrer à l'aide d'un exemple que la suite $(\lfloor u_n \rfloor)$ peut ne pas converger.

▷ **1.** Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\left\{\ell - \lfloor \ell \rfloor \,;\, \lfloor \ell \rfloor + 1 - \ell\right\}$.



On a $\varepsilon > 0$ donc la définition d'une limite permet d'écrire :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

d'où :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

et par choix de ε :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \lfloor \ell \rfloor < u_n < \lfloor \ell \rfloor + 1$$

ce qui induit :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \lfloor u_n \rfloor = \lfloor \ell \rfloor$$

donc la suite $(\lfloor u_n \rfloor)_n$ est stationnaire égale à $\lfloor \ell \rfloor$.
Donc $(\lfloor u_n \rfloor)_n$ converge vers $\lfloor \ell \rfloor$.

2. La suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ converge vers 0 mais la suite de ses parties entières vaut alternativement -1 et 0 donc ne converge pas.

Exercice 3

Dans une entreprise 1% des articles produits sont défectueux. Un contrôle qualité permet de refuser 95% des articles défectueux mais aussi de refuser 2% des articles acceptables.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle?

2. Quelle est la probabilité qu'un article accepté soit en réalité défectueux?

▷ On note D l'événement « le produit est défectueux » et R l'événement « le produit est refusé ».

1. L'événement « il y a une erreur de contrôle » est : $E = (D \cap \overline{R}) \uplus (\overline{D} \cap R)$.

On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(D \cap \overline{R}) + \mathbb{P}(\overline{D} \cap R) \\ &= \mathbb{P}(D)\mathbb{P}_D(\overline{R}) + \mathbb{P}(\overline{D})\mathbb{P}_{\overline{D}}(R)\end{aligned}$$

d'où avec les données de l'énoncé :

$$\mathbb{P}(E) = \frac{1}{100}\frac{95}{100} + \frac{99}{100}\frac{2}{100} = \frac{293}{10000}.$$

2. On cherche $\mathbb{P}_{\overline{R}}(D)$.

Puisque $\mathbb{P}(\overline{R}) \neq 0$ et $\mathbb{P}(D) \neq 0$, la formule de Bayes donne :

$$\mathbb{P}_{\overline{R}}(D) = \frac{\mathbb{P}(D)\mathbb{P}_D(\overline{R})}{\mathbb{P}(\overline{R})}.$$

Puisque D et $\overline{D}$ forment un système complet d'événements de probabilités non nulles, on a :

$$\mathbb{P}_{\overline{R}}(D) = \frac{\mathbb{P}(D)\mathbb{P}_D(\overline{R})}{\mathbb{P}(D)\mathbb{P}_D(\overline{R}) + \mathbb{P}(\overline{D})\mathbb{P}_{\overline{D}}(\overline{R})}.$$

d'où avec les données de l'énoncé :

$$\mathbb{P}_{\overline{R}}(D) = \frac{\frac{1}{100}\frac{95}{100}}{\frac{1}{100}\frac{95}{100} + \frac{99}{100}\frac{98}{100}} = \frac{95}{9797}.$$