Exercice 1 (Python)

1. Définir une fonction python `expo(a, d, x)` qui corresponde à la fonction :

$$f_{a,d} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < d \\ e^{-a(x-d)} & \text{si } x \geqslant d \end{cases}.$$

2. Représenter sur un même graphique et pour $x \in [-5, 10]$ et $a = 2$, les trois fonctions correspondant à $d = 1$, $d = 2$ et $d = 3$.
3. Définir une fonction python `g(a, N, x)` qui corresponde à la fonction :

$$g_{a,\mathrm{N}} : x \mapsto \sum_{d=0}^{\mathrm{N}-1} f_{a,d}(x).$$

4. Représenter, pour $x \in [-3, 100]$ et $a = \frac{\ln(2)}{7}$, la fonction $g_{a,100}$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def expo(a, d, x):
    if x < d:
        return 0
    else:
        return np.exp(-a*(x-d))

plt.figure()
X = np.linspace(-5, 10, 200)  # 200 pour plus de points
Y = np.array([expo(1, 1, x) for x in X])
Z = np.array([expo(2, 2, x) for x in X])
T = np.array([expo(2, 3, x) for x in X])
plt.plot(X, Y, 'b')
plt.plot(X, Z, 'r')
plt.plot(X, T, 'g')
plt.show()

def g(a, N, x):
    s = 0
    for k in range(N):
        s += expo(a, k, x)
    return s

plt.figure()
X = np.linspace(-3, 100, 200)
Y = np.array([g(2, 100, x) for x in X])
plt.plot(X, Y, 'b')
plt.show()

plt.figure()
a = np.log(2)/7
X = np.linspace(-3, 100, 200)
Y = np.array([g(a, 100, x) for x in X])
plt.plot(X, Y, 'b')
plt.show()
```

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $[\![0,4]\!]$. On suppose que :

$$\mathbb{P}(X<3)=\frac{1}{2},\ \mathbb{P}(X>3)=\frac{1}{3}$$

et que les événements $(X=0)$, $(X=1)$ et $(X=2)$ sont équiprobables.
Déterminer la loi de X puis son espérance et sa variance.

$\triangleright$ On a $X(\Omega)=[\![0,4]\!]$ donc :

$$(X>3)=(X=4) \ \text{ et } \ \overline{(X<3)}=(X\geqslant 3)=(X=3)\uplus(X=4).$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(X=4)=\frac{1}{3} \ \text{ et } \ \mathbb{P}(X=3)+\mathbb{P}(X=4)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ce qui induit :

$$\mathbb{P}(X=3)=\frac{1}{6}.$$

Enfin, on a $(X=0)$, $(X=1)$ et $(X=2)$ équiprobables et :

$$(X<3)=(X=0)\uplus(X=1)\uplus(X=2)$$

d'où :

$$\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{6}.$$

Exercice 3

On considère les matrices :

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&1&1\\0&2&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&-1&2\\3&5&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix} \text{ et } D=\begin{pmatrix}5&1&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A+2B$, $3A-B$ et ${}^tA+B$.
2. Indiquer les produits que l'on peut considérer entre les matrices A, B, C et D et calculer la matrice produit le cas échéant.

1. On a :

$$A+2B=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&-1&5\\6&12&-1\end{pmatrix},$$

$$3A-B=\begin{pmatrix}2&-4&7\\10&4&1\\-3&1&-3\end{pmatrix}$$

$$\text{et } {}^tA+B=\begin{pmatrix}2&4&-1\\-2&0&4\\5&-6&-1\end{pmatrix}.$$

2. Les produits que l'on peut calculer sont les suivants :

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -3 \\ 5 & 7 & -1 \\ -5 & -7 & 4 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -4 & 4 & -5 \\ 18 & 2 & 11 \end{pmatrix},$$

$$AC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix},$$

$$DA = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 11 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$DB = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix},$$

$$DC = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } CD = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$