Objectifs et savoir-faire

- *Matrices*
  - Calculer des puissances de matrices (intuition et récurrence, binôme de Newton, utilisation d'un polynôme annulateur ou «diagonalisation guidée»).
  - Utiliser des puissances de matrices (notamment pour des systèmes de suites récurrentes).
- *Polynômes*
  - Maîtriser le vocabulaire lié aux polynômes (degré, racines, ordre de multiplicité d'une racine,...).
  - Calculer avec des polynômes, notamment effectuer une division euclidienne.
  - Maîtriser la notion de racine d'un polynôme et le lien entre avec les notions de divisibilité et de factorisation.
- *Espace vectoriels*
  - Montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel par la propriété de stabilité par combinaison linéaire ou à l'aide de la notation Vect.
  - Montrer, à l'aide d'un contre-exemple explicite, qu'une partie d'un espace vectoriel n'est pas un sous-espace vectoriel.
  - Maîtriser la notion de combinaison linéaire et la notation Vect; notion de famille génératrice.
  - Constituer un « catalogue » d'espaces vectoriels de référence.

► Note aux colleurs –

- Pour les polynômes : il n'y a pas de nombre complexes; les espaces de (fonctions) polynômes sont notés $\mathbb{R}[x]$ et $\mathbb{R}_k[x]$; on s'autorise la notation x^k à la place de $x \mapsto x^k$.
- Tous les espaces vectoriels sont réels.
- Pas de sommes de s.e.v. pour le moment.
- Pas de notion de famille libre ni de base pour le moment (et *a fortiori* de dimension).

► Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :

1. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. Calculer le degré et le coefficient dominant de $\Delta(x) = P(x+1) - P(x)$.
2. Soit $n \geqslant 1$, montrer que le polynôme donné par $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$ n'a pas de racine multiple.
3. Calculer les puissances de la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.
5. Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
6. À l'aide d'un polynôme annulateur, calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.
7. Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}^3$, montrer que c'est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ par deux méthodes (stabilité par combinaison linéaire et notation Vect) ou montrer que ce n'est pas le cas (en explicitant un contre-exemple à la définition) :
$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x + y + z = 0\} \text{ et } G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; xy = 0\}.$$
8. Pour chacune des parties suivantes de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, montrer que c'est un s.e.v. de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ou montrer que ce n'est pas le cas (en explicitant un contre-exemple à la définition) :
$$F = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \; ; \; f \text{ impaire}\} \text{ et } G = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \; ; \; f \text{ s'annule}\}.$$
9. Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}[x]$, montrer que c'est un s.e.v. de $\mathbb{R}[x]$ ou montrer que ce n'est pas le cas (en explicitant un contre-exemple à la définition) :
$$F = \{P \in \mathbb{R}[x] \; ; \; P(0) = 1\} \text{ et } G = \{P \in \mathbb{R}[x] \; ; \; x - 1 \text{ divise } P(x)\}.$$
10. Pour chacune des parties suivantes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que c'est un s.e.v. de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ou montrer que ce n'est pas le cas (en explicitant un contre-exemple à la définition) :
$$F = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \; ; \; \text{A triangulaire supérieure}\}$$
$$\text{et } G = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \; ; \; \text{les coefficients diagonaux de A sont tous nuls}\}.$$
11. On considère l'ensemble E des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ sont la somme des coefficients diagonaux est nulle. Montrer que c'est un s.e.v. de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ par deux méthodes (stabilité par combinaison linéaire et notation Vect).
12. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\mathbf{a} = (0,1,1)$, $\mathbf{b} = (1,1,0)$ et $\mathbf{c} = (1,1,1)$.
Montrer que $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.