Exercice 1

Un étudiant a l'habitude de travailler de la manière suivante :

- s'il étudie toute une nuit alors il est sûr à 70% de ne pas étudier la nuit suivante ;
- s'il n'étudie pas une certaine nuit alors il est sûr à 60% qu'il ne travaillera également pas la nuit suivante.

En fin de compte, avec quelle fréquence étudie-t-il la nuit ?

⊳ Le fait que si l'étudiant étudie la nuit k il y ait 70% de chances qu'il n'étudie pas la nuit suivante se traduit par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{N_k}(\overline{N_{k+1}}) = 0,7.$$

Le fait que lorsqu'il n'étudie pas la nuit k il y ait 60% de chances que ce soit encore le cas la nuit suivante se traduit par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{\overline{N_k}}(\overline{N_{k+1}}) = 0,6.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$, les événements N_k et $\overline{N_k}$ forment un système complet d'événements de probabilités non nulles donc la formule des probabilités totales permet d'écrire :

$$\mathbb{P}(N_{k+1}) = \mathbb{P}(N_k)\mathbb{P}_{N_k}(N_{k+1}) + \mathbb{P}(\overline{N_k})\mathbb{P}_{\overline{N_k}}(N_{k+1}),$$

ce qui conduit à :

$$\mathbb{P}(N_{k+1}) = \mathbb{P}(N_k)\mathbb{P}_{N_k}(N_{k+1}) + \big(1-\mathbb{P}(N_k)\big)\mathbb{P}_{\overline{N_k}}(N_{k+1}),$$

puis numériquement :

$$\mathbb{P}(N_{k+1}) = \mathbb{P}(N_k) \times (1-0,7) + \big(1-\mathbb{P}(N_k)\big) \times (1-0,6).$$

On a finalement :

$$\mathbb{P}(N_{k+1}) = 0,4 - 0,1 \times \mathbb{P}(N_k).$$

La suite $\big(\mathbb{P}(N_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique, on commence donc par résoudre une équation d'inconnue $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \ell = 0,4 - 0,1 \times \ell &\iff 1,1 \times \ell = 0,4 \\ &\iff \ell = \frac{4}{11}. \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{k+1}) - \frac{4}{11} &= \frac{4}{10} - \frac{1}{10} \times \mathbb{P}(N_k) - \frac{4}{11} \\ &= \frac{4}{110} - \frac{1}{10} \times \mathbb{P}(N_k) \\ &= -\frac{1}{10}\Big(\mathbb{P}(N_k) - \frac{4}{11}\Big) \end{aligned}$$

donc la suite $\big(\mathbb{P}(N_k) - \frac{4}{11}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{10}$.
On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(N_k) - \frac{4}{11} = \Big(-\frac{1}{10}\Big)^k\Big(\mathbb{P}(N_0) - \frac{4}{11}\Big),$$

d'où :

$$\mathbb{P}(N_k) = \frac{4}{11} + \Big(-\frac{1}{10}\Big)^k\Big(\mathbb{P}(N_0) - \frac{4}{11}\Big).$$

Puisqu'il s'agit d'une suite géométrique de raison dans $]-1,1[$, on a :

$$\left(-\frac{1}{10}\right)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Il s'ensuit que :

$$\mathbb{P}(\mathrm{N}_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{4}{11}.$$

Ainsi la probabilité que l'étudiant étudie une nuit tend vers $\frac{4}{11}$.

Exercice 2

On considère l'ensemble suivant :

$$\mathrm{E} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x+2y+3z=0\right\}.$$

Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice.

Soit $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^3$, on écrit $\mathrm{X} = (x,y,z)$, alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{X} \in \mathrm{E} &\iff x = -2y-3z \\ &\iff \mathrm{X} = (-2y-3z, y, z) \\ &\iff \mathrm{X} = y.(-2,1,0) + z.(-3,0,1). \end{aligned}$$

Cette équivalence signifie que :

$$\mathrm{E} = \mathrm{Vect}\left((-2,1,0),(-3,0,1)\right).$$

En particulier, E est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.
De plus, les vecteurs $(-2,1,0)$ et $(-3,0,1)$ forment une famille génératrice de E.

Pour montrer que E est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$, on peut aussi procéder ainsi :

- E est une partie de $\mathbb{R}^3$;
- E est non vide puisque $(0,0,0) \in \mathrm{E}$;
- soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in \mathrm{E}^2$, on écrit $\mathrm{X} = (x,y,z)$ et $\mathrm{Y} = (x',y',z')$ alors :

  $$\lambda.\mathrm{X} + \mathrm{Y} = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$$

  et puisque X et Y sont dans E :

  $$\begin{aligned} \lambda x + x' + 2(\lambda y + y') + 3(\lambda z + z') &= \lambda(x+2y+3z) + (x'+2y'+3z') \\ &= 0 \end{aligned}$$

  donc $\lambda.\mathrm{X} + \mathrm{Y} \in \mathrm{E}$.

Donc E est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \geqslant 2$.

1. Soit i et j deux entiers de $[\![1, n]\!]$.

_a._ Donner l'expression du coefficient (i, j) de la matrice ${}^t\mathrm{AB}$.

_b._ En déduire l'expression du coefficient (i, i) de la matrice ${}^t\mathrm{AA}$.

2. Montrer que si la somme des éléments diagonaux de la matrice ${}^t\mathrm{AA}$ est nulle alors la matrice A est nulle.

1. **_a._** Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$\begin{aligned}({}^t\mathrm{AB})[i, j] &= \sum_{k=1}^{n} ({}^t\mathrm{A})[i, k]\mathrm{B}[k, j] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}[k, i]\mathrm{B}[k, j].\end{aligned}$$

_b._ Pour B = A et $j = i$, on obtient :

$$({}^t\mathrm{AA})[i, i] = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}[k, i]^2.$$

2. On suppose que :

$$\sum_{i=1}^{n} ({}^t\mathrm{AA})[i, i] = 0$$

alors, en utilisant la question précédente, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}[k, i]^2 = 0$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{(i,k)\in[\![1,n]\!]^2} \mathrm{A}[k, i]^2 = 0.$$

Il s'agit d'une somme de réels positifs ou nuls : cette somme est nulle si et seulement si tous les termes sommés sont nuls. On a donc :

$$\forall (i, k) \in [\![1, n]\!]^2,\ \mathrm{A}[k, i]^2 = 0$$

ce qui induit :

$$\forall (i, k) \in [\![1, n]\!]^2,\ \mathrm{A}[k, i] = 0$$

donc $\boxed{\text{la matrice A est nulle.}}$