Exercice 1

On jette $n \geq 1$ fois de suite une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir pile est p . Soit X la variable aléatoire égale au numéro du premier lancer qui donne pile (et on convient que X vaut 0 si l'on n'obtient aucun pile au cours des n lancers).

1. Déterminer la loi de X .
2. Calculer l'espérance de X .

▷ On note F_j l'événement « on obtient face au j -ème lancer ».

1. On a $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$(X = k) = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap \overline{F_k}$$

or les lancers sont supposés mutuellement indépendants donc :

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2) \dots \mathbb{P}(F_{k-1})\mathbb{P}(\overline{F_k}) = (1 - p)^{k-1} p.$$

D'autre part :

$$(X = 0) = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap F_n$$

or les lancers sont supposés mutuellement indépendants donc :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2) \dots \mathbb{P}(F_{n-1})\mathbb{P}(F_n) = p^n.$$

2. L'espérance de X est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) \\ &= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^n k (1 - p)^{k-1} p \\ &= p \sum_{k=1}^n k (1 - p)^{k-1} \\ &= p \sum_{k=0}^{n-1} (k + 1) (1 - p)^k. \end{aligned}$$

À ce stade, le calcul semble «bloqué», on procède donc différemment, en remarquant :

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(X \geq k + 1)$$

donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^n k(\mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)) \\ &= \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X \geq k) - \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X \geq k+1) \\ &= \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X \geq k) - \sum_{k'=2}^{n+1} (k'-1)\mathbb{P}(X \geq k') \\ &= \mathbb{P}(X \geq 1) + \sum_{k=2}^n (k - (k-1))\mathbb{P}(X \geq k) - n\mathbb{P}(X \geq n+1) \\ &= \mathbb{P}(X \geq 1) + \sum_{k=2}^n \mathbb{P}(X \geq k) - n\mathbb{P}(X \geq n+1) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X \geq k) - n\mathbb{P}(X \geq n+1)\end{aligned}$$

or en utilisant l'indépendance, on a :

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}(F_1 \cap \dots \cap F_{k-1}) = (1-p)^{k-1}$$

donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^n (1-p)^{k-1} - n(1-p)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (1-p)^k - n(1-p)^n \\ &= \frac{1 - (1-p)^n}{1 - (1-p)} - n(1-p)^n \\ &= \frac{1 - (1-p)^n}{p} - n(1-p)^n.\end{aligned}$$

Exercice 2

On considère l'ensemble suivant :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x - 2y - z = 0 \text{ et } x - y + z = 0\}.$$

Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice.

Soit $X \in \mathbb{R}^3$, on écrit $X = (x, y, z)$, alors :

$$\begin{aligned} X \in E &\iff \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - 2y = z \\ y = -2z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -3z \\ y = -2z \end{cases} \\ &\iff X = (-3z, -2z, z) \\ &\iff X = z \cdot (-3, -2, 1). \end{aligned}$$

Cette équivalence signifie que :

$$E = \text{Vect}((-3, -2, 1)).$$

En particulier, E est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

De plus, le vecteur $(-3, -2, 1)$ forme une famille génératrice de E .

Pour montrer que E est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$, on peut aussi procéder ainsi :

- E est une partie de $\mathbb{R}^3$;
- E est non vide puisque $(0, 0, 0) \in E$;
- soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(X, Y) \in E^2$, on écrit $X = (x, y, z)$ et $Y = (x', y', z')$ alors :

$$\lambda X + Y = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$$

et puisque X et Y sont dans E :

$$\begin{aligned} (\lambda x + x') - 2(\lambda y + y') - (\lambda z + z') &= \lambda(x - 2y - z) + (x' - 2y' - z') \\ &= 0 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} (\lambda x + x') - (\lambda y + y') + (\lambda z + z') &= \lambda(x - y + z) + (x' - y' + z') \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $\lambda X + Y \in E$.

Donc E est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. **a.** Calculer A^2 et A^3 .

b. Déterminer des réels α , β et γ tels que l'on ait :

$$A^3 = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3.$$

c. En déduire que A est inversible et donner l'expression de A^{-1} .

2. **a.** On considère le polynôme :

$$\Pi(x) = x^3 - \alpha x^2 - \beta x - \gamma,$$

où α , β et γ sont les valeurs trouvées précédemment.

Vérifier que 1 est une racine de Π puis factoriser Π dans $\mathbb{R}[x]$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de x^n par $\Pi(x)$.

c. En déduire l'expression de A^5 en fonction de A^2 , A et I_3 .

1. **a.** On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} -8 & -7 & 16 \\ 2 & 1 & -2 \\ -7 & -7 & 15 \end{pmatrix}.$$

b. On vérifie que :

$$A^3 = 2A^2 + A - 2I_3.$$

c. On en déduit que :

$$-\frac{1}{2}A^3 + A^2 + \frac{1}{2}A = I_3,$$

puis :

$$A\left(-\frac{1}{2}A^2 + A + \frac{1}{2}I_3\right) = I_3,$$

donc A est inversible et :

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}A^2 + A + \frac{1}{2}I_3,$$

soit :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

2. **a.** On a $\Pi(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ donc :

$$\Pi(1) = 0,$$

et la division euclidienne de $\Pi(x)$ par $x - 1$ donne :

$$\Pi(x) = (x - 1)(x^2 - x - 2)$$

or les racines de ce polynôme de degré 2 sont -1 et 2 donc :

$$\Pi(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2).$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tels que :

$$x^n = \Pi(x)Q(x) + R(x) \text{ avec } \deg(R) < \deg(\Pi),$$

or Π est de degré 3 donc on peut écrire (avec a, b et c réels) :

$$x^n = \Pi(x)Q(x) + ax^2 + bx + c.$$

En évaluant cette expression aux trois racines de Π , il vient :

$$(S) : \begin{cases} a - b + c = (-1)^n \\ a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2^n \end{cases}.$$

On en déduit :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = (-1)^n \\ 2b = 1 - (-1)^n \\ 6b - 3c = 2^n - 4(-1)^n \end{cases}$$

puis :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = (-1)^n \\ 2b = 1 - (-1)^n \\ -3c = 2^n - (-1)^n - 3 \end{cases}$$

et finalement :

$$c = \frac{3 + (-1)^n - 2^n}{3}, \quad b = \frac{1 - (-1)^n}{2} \text{ et } a = \frac{-3 + (-1)^n + 2^{n+1}}{6}.$$

Donc le reste est :

$$\frac{-3 + (-1)^n + 2^{n+1}}{6}x^2 + \frac{1 - (-1)^n}{2}x + \frac{3 + (-1)^n - 2^n}{3}.$$

c. On a montré qu'il existe un polynôme Q tel que :

$$x^5 = \Pi(x)Q(x) + \frac{-3 + (-1)^5 + 2^{5+1}}{6}x^2 + \frac{1 - (-1)^5}{2}x + \frac{3 + (-1)^5 - 2^5}{3},$$

soit :

$$x^5 = \Pi(x)Q(x) + 10x^2 + x - 10,$$

d'où en substituant A à x et en utilisant la relation trouvée en **1.b** :

$$A^5 = 10A^2 + A - 10I_3.$$