Exercice 1

On jette $n \geqslant 1$ fois de suite une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir pile est p. Soit X la variable aléatoire égale au numéro du premier lancer qui donne pile (et on convient que X vaut 0 si l'on n'obtient aucun pile au cours des n lancers).

1. Déterminer la loi de X.

2. Calculer l'espérance de X.

Exercice 2

On considère l'ensemble suivant :

$$\mathrm{E} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x - 2y - z = 0 \text{ et } x - y + z = 0\right\}.$$

Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice.

Exercice 3

On considère la matrice A suivante :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. ***a.*** Calculer A^2 et A^3.

b. Déterminer des réels α, β et γ tels que l'on ait :

$$\mathrm{A}^3 = \alpha\mathrm{A}^2 + \beta\mathrm{A} + \gamma\mathrm{I}_3\,.$$

c. En déduire que A est inversible et donner l'expression de A^{-1}.

2. ***a.*** On considère le polynôme :

$$\Pi(x) = x^3 - \alpha x^2 - \beta x - \gamma,$$

où α, β et γ sont les valeurs trouvées précédemment.
Vérifier que 1 est une racine de Π puis factoriser Π dans $\mathbb{R}[x]$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de x^n par $\Pi(x)$.

c. En déduire l'expression de A^5 en fonction de A^2, A et I_3.