Exercice 1

Les instructions suivantes définissent une fonction sans argument `de()` qui simule le lancer d'un dé usuel à 6 faces bien équilibré.

```
import numpy.random as rd

def de():
    return rd.randint(1, 7)
```

Par exemple :

```
>>> de()
6
>>> de()
5
>>> de()
2
```

Écrire une fonction `succession(n)` d'argument un entier naturel non nul `n`, qui simule `n` lancers d'un dé usuel, et qui renvoie la liste des tirages ainsi que le nombre de 6 obtenus. Par exemple :

```
>>> succession(10)
([2, 2, 1, 4, 3, 5, 1, 5, 5, 6], 1)
>>> succession(10)
([4, 6, 6, 6, 3, 1, 5, 6, 5, 6], 5)
>>> succession(10)
([4, 4, 2, 5, 2, 2, 2, 5, 5, 5], 0)
```

```
def succession(n):
    L = []
    c = 0
    for k in range(n):
        L.append(de())
        if L[-1] == 6:
            c += 1
    return L, c
```

Exercice 2

On considère l'ensemble suivant :

$$E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\ ;\ x - y - z + t = 0 \text{ et } x + y + 2z - t = 0\right\}.$$

Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une famille génératrice.

Soit $X \in \mathbb{R}^4$, on écrit $X = (x, y, z, t)$, alors :

$$\begin{aligned}
X \in E &\iff \begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ x + y + 2z - t = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ 2y + 3z - 2t = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y = z - t \\ y = -\frac{3}{2}z + t \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2}z \\ y = -\frac{3}{2}z + t \end{cases} \\
&\iff X = \left(-\frac{1}{2}z, -\frac{3}{2}z + t, z, t\right) \\
&\iff X = z.\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0\right) + t.(0, 1, 0, 1).
\end{aligned}$$

Cette équivalence signifie que :

$$E = \mathrm{Vect}\left(\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0\right), (0, 1, 0, 1)\right).$$

En particulier, E est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$.
De plus, les vecteurs $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0\right)$ et $(0, 1, 0, 1)$ forment une famille génératrice de E.
On aurait pu aussi utiliser la stabilité par combinaison linéaire pour montrer que E est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3

Pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle *trace* de A et l'on note tr(A) la somme des coefficients diagonaux de A, c'est-à-dire :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A[i,i].$$

1. Montrer que pour tout réel λ et toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a les relations :

$$\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{tr}(A) \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B).$$

2. Montrer que pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a la relation :

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

1. Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\lambda A) &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda A)[i,i] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda A[i,i] \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} A[i,i] \\
&= \lambda\,\mathrm{tr}(A).
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(A+B) &= \sum_{i=1}^{n} (A+B)[i,i] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(A[i,i] + B[i,i]\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} A[i,i] + \sum_{i=1}^{n} B[i,i] \\
&= \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B).
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{tr}(A)} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B).}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} AB[i,i] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A[i,k]B[k,i] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A[i,k]B[k,i] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B[k,i]A[i,k] \\
&= \sum_{k=1}^{n} BA[k,k] \\
&= \mathrm{tr}(BA)
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).}$