Objectifs et savoir-faire

- *Séries :*
  - Connaître les séries de référence : séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$, séries géométriques $\sum x^n$ et les deux premières séries géométriques dérivées $\sum nx^{n-1}$ et $\sum n(n-1)x^{n-2}$.
  - Connaître les propriétés des séries convergentes.
  - Étudier la convergence d'une série (par le calcul des sommes partielles ou par utilisation d'une série de référence).
  - Calculer la somme d'une série convergente (par le calcul des sommes partielles ou par utilisation d'une série de référence de somme connue).
  - Utiliser, sur des exemples simples, la formule de Taylor avec reste intégral pour étudier la convergence d'une série et calculer sa somme.
  - Maîtriser les critères de comparaison ($0 \leqslant u_n \leqslant v_n$) et d'équivalence ($u_n \sim v_n$) pour les séries à termes positifs (et rédiger correctement leur utilisation).
  - Maîtriser le critère de négligeabilité ($u_n = o(v_n)$) pour une série à termes quelconques (et rédiger correctement son utilisation).
  - Connaître la notion de convergence absolue et son lien avec la convergence.
- Fonction convexes.
  - Connaître la définition et exploiter une inégalité de convexité.
  - Caractériser géométriquement la convexité (cordes, tangentes).
  - Caractériser la convexité par la croissance de la dérivée (et par $f'' \geqslant 0$ dans le cas $\mathscr{C}^2$).
  - Traduire les concepts ci-dessus dans le cas des fonctions concaves.

► Note aux colleurs –

- Le thème principal de la colle porte sur les séries ! Le reste n'est là que pour compléter.
- La notion de série alternée et le critère d'Alembert ne sont pas au programme.

► Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :

1. Étudier la nature des séries de terme général :
$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } v_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

2. Étudier la nature des séries de terme général :
$$u_n = \frac{\left(\ln(n)\right)^2}{n^4} \text{ et } v_n = \frac{1}{n \times n^{\frac{1}{n}}}.$$

3. Étudier la nature des séries de terme général :
$$u_n = \frac{\cos(n) - \sin(n)}{n^2} \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2}.$$

4. Étudier la convergence et déterminer la somme des séries de terme général :
$$u_n = n\mathrm{e}^{-n} \text{ et } v_n = \frac{2^n}{(n+2)!}.$$

5. Étudier la convergence et déterminer la somme de la série de terme général :
$$u_n = \frac{4^n}{(2n)!}.$$

6. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que :
$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ x - \frac{1}{6}x^3 \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5.$$

7. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$$
(il ne sera pas nécessaire de rédiger précisément la récurrence pour le calcul des dérivées successives de la fonction considérée).

8. Montrer que $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$ est concave sur $]1, +\infty[$.
En déduire que pour tous réels $a > 1$ et $b > 1$, on a :
$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a)\ln(b)}.$$

9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et positive.
Montrer que si f s'annule en a et en b alors f est nulle sur $[a, b]$.