Objectifs et savoir-faire

- *Séries :*
  - Connaître les séries de référence : séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$, séries géométriques $\sum x^n$ et les deux premières séries géométriques dérivées $\sum nx^{n-1}$ et $\sum n(n-1)x^{n-2}$.
  - Connaître les propriétés des séries convergentes.
  - Étudier la convergence d'une série (par le calcul des sommes partielles ou par utilisation d'une série de référence).
  - Calculer la somme d'une série convergente (par le calcul des sommes partielles ou par utilisation d'une série de référence de somme connue).
  - Utiliser, sur des exemples simples, la formule de Taylor avec reste intégral pour étudier la convergence d'une série et calculer sa somme.
  - Maîtriser les critères de comparaison ($0 \leqslant u_n \leqslant v_n$) et d'équivalence ($u_n \sim v_n$) pour les séries à termes positifs (et rédiger correctement leur utilisation).
  - Maîtriser le critère de négligeabilité ($u_n = o(v_n)$) pour une série à termes quelconques (et rédiger correctement son utilisation).
  - Connaître la notion de convergence absolue et son lien avec la convergence.
- *Étude locale de fonctions :*
  - Comparer localement (négligeabilité, équivalence) des fonctions.
  - Utiliser des équivalents pour des calculs de limites.
- *Développements limités*
  - Connaître les développements limités en 0 usuels.
  - Calculer des développements limités en 0 (par combinaison linéaire, produit, formule de Taylor) et « ailleurs » par composition avec $t \mapsto t + a$ ou $t \mapsto \frac{1}{t}$.
  - Utiliser des développements limités pour (obtenir des équivalents pour) un calcul de limite.
  - Utiliser des développements limités pour étudier une fonction au voisinage d'un point ou de l'infini.
  - Utiliser des développements limités pour étudier la convergence d'une série.

► Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :

1. Soit f et g deux fonctions continues sur $[0,+\infty[$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$, on pose pour tout $x \geqslant 0$:
$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{G}(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que si $f \underset{+\infty}{=} o(g)$ et si $\mathrm{G}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ alors $\mathrm{F} \underset{+\infty}{=} o(\mathrm{G})$.

2. Calculer la limite en e de $f(x) = \Big(\ln(x)\Big)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2\mathrm{e}}\right)}$.

3. Donner les développements limités suivants :
$$\mathrm{DL}_3(0) \text{ de } f(x) = \cos(x)\sqrt{1+x}\ ;\ \mathrm{DL}_4(1) \text{ de } g(x) = \mathrm{e}^x.$$

4. Donner les développements limités suivants :
$$\mathrm{DL}_3(0) \text{ de } f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x}}{1-x}\ ;\ \mathrm{DL}_4(\mathrm{e}) \text{ de } g(x) = \ln(x).$$

5. Déterminer la limite de la suite u donnée par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n.$$

6. Déterminer la limite de $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2(x)}$ quand x tend vers 0.

7. Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{1-x}$.
Déterminer une équation de la tangente au graphe de f au point de cooordonées $(0, f(0))$ puis la position de la courbe par rapport à sa tangente.

8. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général :
$$u_n = (-1)^n n^a\left(\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$
On admettra que si (a_n) est une suite décroissante de réels de limite nulle alors la série $\sum(-1)^n a_n$ converge.