Objectifs et savoir-faire

- *Intégrales généralisées*
  - Connaître les intégrales de référence : intégrales de Riemann $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$, intégrale d'une exponentielle $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$.
  - Connaître les propriétés des intégrales convergentes.
  - Étudier la convergence d'une intégrale (par le calcul d'une intégrale sur un segment ou par utilisation d'une intégrale de référence).
  - Calculer une intégrale convergente.
  - Maîtriser les critères de comparaison et d'équivalence ($0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ et $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$) pour les intégrales de fonctions positives et rédiger correctement leur utilisation.
  - Maîtriser le critère de négligeabilité ($f(x) = o(g(x))$) pour une intégrale de fonction «quelconque».
  - Connaître la notion de convergence absolue et son lien avec la convergence.
  - Maîtriser le théorème de changement de variable sur un intervalle $]a, b[$.

► **Note aux colleurs :**

- Les intégrations par parties ne doivent être réalisées que sur des segments sur lesquels les fonctions sont continues (avant de faire tendre une borne, ou les deux).

► **Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :**

1. Montrer la convergence de $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ puis étudier celle de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$.

2. Étudier la convergence de $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|t(t-1)(t-2)|}}\,\mathrm{d}t$.

3. À l'aide d'une intégration parties, montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

4. On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a. Justifier que le domaine de définition de la fonction Γ est $]0, +\infty[$.

b. Déterminer une relation entre $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

5. On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $x > 0$.

a. Pour tout $x > 0$, déterminer une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$.

b. En déduire l'expression de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Pour tout x et y réels strictement positifs, on pose :

$$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

a. Prouver la convergence de l'intégrale définissant $\mathrm{B}(x, y)$.

b. Démontrer que, pour tous $x > 0$ et $y > 0$, on a : $\mathrm{B}(x, y) = \mathrm{B}(y, x)$.

c. Démontrer que, pour tous $x > 0$ et $y > 0$, on a : $\mathrm{B}(x+1, y) = \frac{x}{y}\mathrm{B}(x, y+1)$.