Objectifs et savoir-faire

- Révisions sur les probabilités sur un univers fini.
  - Reconnaître une situation de probabilité uniforme.
  - Utiliser les formules des probabilités totales, des probabilités composées, de Bayes.
  - Maîtriser la notion de probabilité conditionnelle.
  - Comprendre et utiliser la notion d'indépendance (deux à deux, mutuelle) d'événements.
  - Maîtriser les notions générales : v.a. finie, loi d'une v.a., fonction de répartition d'une v.a.
  - Maîtriser la notion d'espérance d'une v.a. : définition, calcul, positivité, croissance, linéarité, théorème de transfert $\mathbb{E}(u(x)) = \sum_{x\in X(\Omega)} u(x)\mathbb{P}(X = x)$.
  - Maîtriser les notions de variance et d'écart-type : définitions, formule de Koenig-Huygens, positivité de la variance, $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.
  - Connaître quelques lois de référence : loi certaine, loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale.
- Probabilités sur un ensemble quelconque.
  - Comprendre la notion de dénombrabilité et connaître la définition d'un ensemble d'événements (tribu).
  - Maîtriser le formalisme des espaces probabilisés.
  - Utiliser les formules des probabilités totales et des probabilités composées.
  - Utiliser l'indépendance d'événements.
  - Appliquer le théorème de la limite monotone (*i.e.* le théorème de continuité croissante/décroissante).
  - Manipuler le formalisme des variables aléatoires réelles.
  - Étudier une variable aléatoire réelle discrète.
- Utilisation de Python pour l'étude de problème probabilistes.
  - Simuler une expérience aléatoire.
  - Simuler une variable aléatoire et représenter sa loi.
  - Estimer l'espérance d'une variable aléatoire (finie).

► Note aux colleurs :

- Tous les étudiants devront être interrogés sur la simulation de variables aléatoires avec Python.
- Aucun exercice ne doit être posé sur la dénombrabilité ni sur les tribus.
- Certaines notions n'ont pas encore été vues : théorème de transfert, variance, lois discrètes usuelles, notion de couple de variables aléatoires, inégalités.

► Note aux étudiants :

- La calculatrice peut être utile en colle, penser à la prendre !

► Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :

1. On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir *pile* est p (avec $0 < p < 1$ et $p \neq \frac{1}{2}$).

a. Soit $n \geqslant 1$, quelle est la probabilité de l'événement A_n : « la séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers n et $n+1$ » ?

b. Quelle est la probabilité de l'événement A : « la séquence PF apparaît au moins une fois » ?

2. Soit X une variable aléatoire réelle discrète infinie avec $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X = k) + (n+1)\,\mathbb{P}(X > n)$.

b. En déduire que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X > n)$ converge et que, dans ce cas, on a : $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$.

3. Montrer que la fonction de répartion d'une variable aléatoire discrète est croissante et tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$.

4. Soit X une variable aléatoire discrète. Montrer que la fonction de répartion de X :

- est continue à droite en tout réel ;
- est continue à gauche en un réel a si et seulement si $\mathbb{P}(X = a) = 0$.