Objectifs et savoir-faire

▶ *Langage mathématique*

- Décrire un ensemble de nombres avec rigueur.
- Maîtriser le vocabulaire «condition nécessaire», «condition suffisante», «il faut», «il suffit», etc.
- Maîtriser la syntaxe d'utilisation des quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

▶ *Raisonnement*

- Rédiger un raisonnement par récurrence.
- Comprendre l'utilité des différentes versions du raisonnement par récurrence.
- Formaliser un raisonnement par l'absurde, par contraposition, par disjonction de cas.

▶ *Nombres réels*

- Exploiter une représentation graphique des nombres réels (notamment avec des valeurs absolues) pour guider un raisonnement.
- Calculer avec des nombres réels, manipuler des inégalités et des encadrements.
- Connaître et maîtriser la notion de partie entière d'un réel.

▶ *Sommes et produits*

- Connaître et manipuler les symboles $\sum$ et $\prod$.
- Connaître la notion de factorielle $n!$ d'un entier naturel n.
- Calculer des sommes (simples, doubles).

▶ *Révisions sur les équations polynomiales de degré 2*

▶ **Note aux colleurs :**

- les raisonnements par récurrence devront *a priori* reposer sur une hypothèse simple (le cas d'une hypothèse double ou forte devra être guidé) ;
- les sommes à connaître sont $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ (pour $x \neq 1$), $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ ainsi que la formule du binôme ;

▶ **Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :**

1. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $2^n \geqslant n^3$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que : $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

3. Résoudre l'équation d'inconnue réelle x suivante : $\lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor$.

4. Montrer que pour tout réel x, on a : $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor = \lfloor 3x \rfloor$.

5. Soit n un entier avec $n \geqslant 1$, calculer $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \min(i,j)$.

6. Soit n un entier avec $n \geqslant 2$, calculer $\mathrm{P} = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

7. *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tous réels $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, avec au moins l'un des x_k non nuls, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right),$$

Préciser dans quel cas il y a égalité.