

**Objectifs et savoir-faire**

► *Sommes et produits*

- Calculer des sommes (simples, doubles).
- Calculer avec des coefficients binomiaux, utiliser la formule du binôme de Newton.

► *Suites réelles*

- Exprimer en fonction de  $n$  une suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique ou donnée par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
- Étudier des propriétés globales d'une suite (monotonie, caractère borné).

► *Études de fonctions*

- Représenter une fonction du type  $x \mapsto f(kx)$ ,  $x \mapsto f(x+k)$ , etc. à partir d'une fonction connue.
- Maîtriser la notion de composition de fonctions.
- Maîtriser le vocabulaire «global» lié au fonctions : (im)parité, périodicité, majoré, minoré, borné, monotonie, stricte monotonie.
- Notion d'asymptote au graphe d'une fonction.
- Notions intuitives de limite, continuité, dérivabilité, dérivée ; formulaire de dérivées usuelles.
- Connaître les propriétés des fonctions de référence, notamment exp, ln,  $x \mapsto x^\alpha$ , cos, sin et tan.
- Connaître les limites par croissances comparées.
- Étudier les variations d'une fonction et la représenter graphiquement.

► **Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

a. Calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$  et  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$ .

b. En déduire les deux sommes suivantes :  $a = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$  et  $b = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

a. Justifier le fait que :  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ .

b. Simplifier l'expression  $k \binom{n}{k}$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

c. Calculer la somme  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ .

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Montrer que  $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$  :

- à l'aide d'un raisonnement par récurrence ;
- à l'aide d'un télescopage.

4. Soit  $f$  l'application définie sur  $\mathbb{R}$ , périodique de période 2 et donnée sur  $[-1, 1]$  par :

$$\forall x \in [-1, 1], f(x) = |x|.$$

Représenter graphiquement (en expliquant) la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-5, 5]$  puis déterminer l'expression de  $f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

5. Étudier la monotonie des suites  $u$  et  $v$  données par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{n^n}{n!}.$$

6. Montrer que la suite  $x$  donnée par  $u_0 = 1$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n},$$

est bien définie et étudier sa monotonie.

7. Montrer qu'une suite périodique est bornée.

8. Montrer qu'une suite arithmétique est caractérisée par la propriété suivante : « chaque terme est la moyenne du terme qui le précède et de celui qui le suit. »

9. Énoncer et démontrer (en utilisant des manipulations du symbole  $\sum$ ) la formule donnant la somme des termes d'une suite arithmétique puis d'une suite géométrique.