Objectifs et savoir-faire

- *Suites réelles*
  - Exprimer en fonction de n une suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique ou donnée par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
  - Étudier des propriétés globales d'une suite (monotonie, caractère borné).
  - Justifier la convergence ou la divergence d'une suite.
  - Calculer des limites (par opérations ou par théorème d'encadrement).
  - Maîtriser la notion de suites adjacentes, faire le lien avec la convergence.
  - Comparer asymptotiquement des suites à l'aide des notions de négligeabilité et d'équivalence (et utiliser les notations associées).
- *Systèmes linéaires*
  - Résoudre un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.
  - Résoudre un système en discutant selon les valeurs d'un paramètre.

▶ **Note aux colleurs :**

- pas de théorie sur les systèmes linéaires, seulement la pratique de résolution (notamment par l'algorithme du pivot de Gauss).

▶ **Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :**

1. Déterminer un équivalent simple de :

$$u_n = n^2 \ln\left(2 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

et un de :

$$v_n = n \ln \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}.$$

2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \sim n!$.

3. Montrer par la démonstration «classique» le lemme de Cesaro : si u est une suite convergente de limite ℓ alors on a

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

4. Soit u la suite réelle donnée par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}.$$

a. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Prouver que : $\mathrm{e}^{u_{n+1}} - \mathrm{e}^{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

c. À l'aide du lemme de Cesaro, montrer que $u_n \sim \ln(n)$.

5. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0, avec $u_0 > 0$, et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \geqslant 0, u_{n+1} = u_n + u_n^2.$$

a. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Pour $n \geqslant 0$ on pose : $v_n = \frac{1}{2^n}\ln(u_n)$.
Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et qu'à partir d'un certain rang (que l'on ne cherchera pas à préciser), on a :

$$v_{n+1} \leqslant v_n + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

c. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

6. Résoudre, en fonction du réel a, le système suivant :

$$(\mathrm{S}_a)\ \begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ x + ay + az = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{cases}.$$